

QA
23
L4
1909

Sefer Maassei Choscheb.

Die Praxis des Rechners.

Ein hebräisch-arithmetisches Werk

des

LEVI BEN GERSCHOM

aus dem Jahre 1321.

Zum ersten Male herausgegeben und ins Deutsche übertragen

von

Dr. Gerson Lange,

Direktor der Realschule der Israelitischen Religionsgesellschaft zu Frankfurt a. M.



FRANKFURT AM MAIN.

Buchdruckerei Louis Golde.

1909.

1909. Programm-Nr. 560.

Digitized by the Internet Archive
in 2018 with funding from
University of Toronto

https://archive.org/details/sefermaasehoshev00levi

Sefer Maassei Choscheb.

Die Praxis des Rechners.

Ein hebräisch-arithmetisches Werk

des

LEVI BEN GERSCHOM

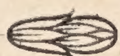
aus dem Jahre 1321.

Zum ersten Male herausgegeben und ins Deutsche übertragen

von

Dr. Gerson Lange,

Direktor der Realschule der Israelitischen Religionsgesellschaft zu Frankfurt a. M.



FRANKFURT AM MAIN.

Buchdruckerei Louis Golde.

1909.

1909. Programm-Nr. 560.

Vorwort.

Levi ben Gerschom, (gew. ben Gerschon), bei den nichtjüdischen Schriftstellern auch Leo de Balneolis genannt, mehr bekannt unter dem Namen Gersonides, wurde 1288 geboren. Sein Geburtsjahr ist aus dem arithmetischen Werk, das uns hier vorliegt, zu bestimmen. Es ist im Jahre 5081, d. i. 1321 der gewöhnlichen Zeitrechnung, im 33. Lebensjahr des Verfassers beendet worden, wie am Schlusse des zweiten Abschnittes mitgeteilt wird. Levis Todesjahr steht nicht genau fest, sicher ist nur, daß er 1343 noch gelebt und 1360 als ein Verstorbener genannt wird. In Orange, Perpignam und vornehmlich in Avignon, der damaligen Residenz der Päpste, lebend, wurde er von den Verfolgungen, denen die Geldgier Philipps des Schönen die Juden seines Reiches preisgab, verschont, denn Avignon war gerade um diese Zeit an Karl von Anjou abgetreten worden und Perpignam gehörte noch zu Arragonien, in dem die Juden noch fast zwei Jahrhunderte ein verhältnismässig ruhiges Leben führen durften. Auch die Hirtenverfolgungen, unter denen Arragonien viel zu leiden hatte, trafen ihn nicht direkt, da er zu dieser Zeit in Avignon lebte und der Papst, der die Ausschreitungen der wilden Horden gegen die christlichen Geistlichen Frankreichs, „die falschen Hirten“, mit Schrecken sah, den Strom der fanatischen Banden von seiner Residenz weg nach Spanien zu leiten verstand. So führte Levi ben Gerschom ein verhältnismässig ruhiges Leben und konnte seine überaus grossen Geistesgaben auf den meisten Gebieten der Wissenschaft entfalten.

Es ist erstaunlich, wie vielseitig Gersonides war, und es ist charakteristisch für ihn, mit welcher Gründlichkeit und wie methodisch er in allen Disziplinen arbeitete, mit denen er sich beschäftigte. Seine Kommentare zur Bibel, unter denen besonders

die zum Pentateuch und zum Buche Hiob hervorragen, atmen Klarheit und Uebersichtlichkeit, ein gründlicher, angesehener Kenner des Talmud, kommentierte er auch einige Traktate dieses Werkes und schrieb ausserdem eine Methodologie der Mischna, יסוד המשנה, als Arzt erfand er neue Heilmittel, seine astronomischen Berechnungen dienten noch lange als Grundlagen für die Arbeiten Späterer. Bekannt ist ja, daß er den Jakobstab, ein einfaches astronomisches Instrument, unter Berücksichtigung vieler physikalischer Gesetze so verbesserte, dass fast alle astronomischen Messungen damit ausgeführt werden konnten, und daß das Princip des verjüngten Massstabes dabei vollkommen zur Verwendung kam. In seinem grossen philosophischen Werk, Milchamoth Haschem, Kämpfe für Gott genannt, ist er ein durchaus selbständiger Forscher, dessen streng logische Deduktionen ihre Ueberzeugungskraft geltend machen. Als Mathematiker ist er einer von denen, die die Resultate der Forschungen der Araber erweiterten und dem Occident übermittelten. Seine Arbeiten, die zum Teil ins Lateinische übertragen wurden, zum Teil wohl auch lateinisch geschrieben waren, lagen sicher Regiomontanus vor, und es ist kein Zweifel, daß er auf die Entwickelung der Mathematik im Abendland einen gewissen Einfluss ausgeübt hat. Teile seines trigonometrischen Hauptwerkes, das ursprünglich mit den astronomischen Schriften einen Teil seines philosophischen Werkes bildete, aber sich auch unter dem Titel Leo de Balueolis Israelita de sinibus, chordis et arcubus, item instrumento revelatore secretorum(מגלה עמוקות nannte er seinen verbesserten Jacobstab) gesondert findet, hat Curtze in den Bibliotheca mathematica veröffentlicht und das ganze Werk dort analysiert und besprochen.

So erscheint es denn nicht unangebracht, auch die arithmetische Schrift, das Sefer Maassei Choscheb, durch Herausgabe und Uebersetzung aus dem Hebräischen weiteren, des Hebräischen unkundigen Kreisen zugänglich zu machen und damit der Geschichte der Mathematik einen Dienst zu leisten. Das Werk zerfällt in zwei Abschnitte (מאמרים), in einen theoretischen Teil und in ein praktisches Rechenbuch. Der theoretische Teil macht indessen keinen Anspruch darauf, etwa als Lehrbuch der Arithmetik angesehen zu werden, man ist am Ende auf den ersten Blick gar enttäuscht, weil man kein methodisches Vorgehen zu

finden scheint. Wenn man indessen die Einleitung betrachtet, so sieht man, dass dieser theoretische Teil nicht Selbstzweck ist, daß er vielmehr nur eine Grundlage für den zweiten Abschnitt bilden soll, damit die dort vorgeführten Rechenoperationen nicht mechanisch sondern mit Verständnis vorgenommen werden können, damit das Gleiche in dem Verschiedenen erkannt werde und nicht „für dieselbe Operation viele Kenntnisse nach der Verschiedenheit der Materie erforderlich seien“. Nach diesem Gesichtspunkte ist auch die Auswahl der angeführten 68 Sätze vorgenommen.

Obwohl daher unser Autor in der Einleitung ausdrücklich bemerkt, daß die Theorie der Praxis vorangehen solle, müssen wir zum Verständnis der Anlage des Werkes, analytisch vorgehend, mit dem zweiten Teil und seiner Besprechung beginnen. Er zerfällt in 6 Abteilungen — שערים, Pforten Kapitel, wie sie genannt sind. Zuerst werden Addition und Subtraktion behandelt, dann die Addition gleicher Zahlen, d. i. also die Multiplikation, zu der die Quadrierung gehört, dann kommt die Addition von Reihen, auf die ein kurzes Kapitel Combinatorik folgt, dann die Division mit der Radizierung, endlich werden Proportionsaufgaben behandelt, über deren Bedeutung noch Besonderes zu sagen sein wird. Ausdrücklich aber wird in der Einleitung des zweiten Abschnitts darauf hingewiesen, daß alle diese Rechnungsarten eigentlich nur in zwei zerfallen, also entweder auf „Vermehrung“ oder „Verminderung“ zurückzuführen sind, jedenfalls ein Zeichen höheren mathematischen Erkennens, als es sonst dem Zeitalter Levis zukam, das 9 Rechnungsarten unterschied. Wenn man nun also auch die Subtraktion erst vor der Division behandeln sollte, so kann sie doch auch der Addition gegenüber gestellt werden, und der Gleichartigkeit des Schemas wegen ist das auch im Kapitel 1 geschehen. Das Additionsbild ist genau das moderne, es wird stets von links nach rechts addiert, die Zahlen haben ja ihren Positionswert, der 10 übersteigende Teil der Summe der einzelnen Kolonnen sofort in eine höhere Einheit verwandelt, bezw. wird bei den Sexagesimalbrüchen, deren Addition schon hier vorgenommen werden kann, weil sie im Princip mit der, der ganzen Zahlen übereinstimmt, der über 60 hinausgehende Teil der Summe der Rubrik als höhere Einheit der nächsten Stufe hinzugezählt. Auch die Tafel der Subtraktion ist ganz die unsrige, das Resultat, die Differenz, er-

scheint unter dem Subtrahenden, für den Fall, daß die Ziffer des Minuenden kleiner als die des Subtrahenden ist, tritt die Zuhilfenahme der Einheit der nächsthöheren Stufe ein, diese Einheit wird, wie wir es tun, von der nächst höheren Stelle des Minuenden abgezogen, nicht zu der nächst höheren Stufe des Subtrahenden addiert. Nur wird in Abweichung von unserem Gebrauch die Verminderung der nächst höheren Stelle nicht durch einen Punkt sondern durch Darüberschreiben kenntlich gemacht, der Hilfspunkt tritt, nebenbei bemerkt, erst im 16. Jahrhundert auf.

Richtig modern mutet uns das nun folgende zweite Kapitel des zweiten Abschnittes an, man hat die Empfindung, von den termini technici abgesehen, könnte man heute methodisch auch nicht anders vorgehen, als Gersonides es tut. Er gibt zunächst einleitend an, zu welcher Dekade das Produkt der Einheiten zweier Dekaden der ganzen Zahlen gehört, erörtert dabei gleich dasselbe für Produkte der Sexagesimalbrüche und gibt dann für das praktische Rechnen das Schema an, das genau dem unsrigen, wenn wir nach links ausrücken, entspricht. Er geht damit weit über seine Zeit hinaus, wenn Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, dem wir in den geschichtlichen Daten dieser Darstellung folgen, erst im Rechenbuch des Johann Widmann v. Eger (1489) unser Rechenanordnung findet, so sind wir fast zwei Jahrhunderte früher in der Lage, sie bei unserem Autor nachzuweisen. Inwiefern Regiomontan von diesem beeinflusst ist, wird sich nur schwer nachweisen lassen. Jedenfalls für das Kopfrechnen, sind in dem Kapitel noch einige Weisen der Multiplikation mit Zuhilfenahme dekadischer Ergänzungen angegeben, die zum Teil für das Quadrieren zweistelliger Zahlen verwendet werden.

Auch im 3. Kapitel finden wir des Neuen genug. Die Ableitung der Summenformel für die nicht natürliche Zahlenreihe, sowie für die allgemeine arithmetische Reihe ist eine eigentümliche. Es befremdet zuerst, daß ein Mann von der Bedeutung des Levi ben Gerschon, der für die Reihe der natürlichen Zahlen sowie für die graden und ungraden Zahlen für sich eine Summenformel ganz auf die Weise ableitet und beweist, die wir anwenden, den einen Schritt der Verallgemeinerung nicht getan haben sollte, sondern auf dem Umweg über die Summe einer nicht natürlichen Reihe erst zu der allgemeinen arithmetischen Reihe gelangt sein

sollte. Vielleicht gehen wir nicht fehl, wenn wir annehmen, daß die Aufgabe, die er sich des weiteren gestellt hat, nämlich die Summation der Quadrate und dritten Potenzen der Glieder einer arithmetischen Reihe, ihn veranlaßt hat, diese wie jene Reihen auf die natürliche Zahlenreihe zurückzuführen, um in allen Fällen denselben Weg einzuschlagen. Die Ableitung der Formeln, die er für die natürliche Reihe hat, befindet sich naturgemäß im ersten Abschnitt und wird dort zu besprechen sein. Für die geometrische Reihe bringt er die moderne Summationsformel in der Gestalt, in der sie Tropfke zuerst bei Prosdocimo de Beldomandi aus Padua (1410), also fast 100 Jahre später findet.

Combinatorik ist die Ueberschrift des 4ten, kurzen Kapitels, in dem nicht die zyklischen Vertauschungen und die Bildungsart der einzelnen Complexionen der Permutations- Variations- und Combinationsaufgaben gebracht, sondern nur die Permutations- Variations- und Combinationszahlen berechnet werden. Da dieser Teil in der Tat nur praktische Beispiele für den entsprechenden des ersten Abschnitts bringt, können wir seine Besprechung zunächst noch aufschieben.

Hat so das vierte Kapitel intensiv und extensiv weniger Bedeutung, so ist das fünfte ein desto umfangreicheres und wichtigeres, es bringt nicht nur die Division mit ganzen Zahlen, mit Sexagesimal- und gewöhnlichen Brüchen, die Addition, Subtraktion und Multiplikation von Brüchen aller Art, sondern es behandelt auch das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln.

Was zunächst das Divisionsschema betrifft, so ist es weder das alte Ueberwärtsdividieren noch das moderne Unterwärtsteilen, sondern es stellt einen Uebergang vor. Es ist ein modernes Teilen, insofern nicht die Einzel-Teilprodukte, sondern die fertigen Teilprodukte, zur Subtraktion bereit, unterwärts geschrieben werden, es ist das alte Ueberwärtsdividieren, indem jedesmal die neue Dividendenzahl über die vorige geschrieben wird. Da jedoch der Unterschied in der Schreibweise nur ein ganz äußerlicher ist, und der Hauptvorteil der modernen Art — von der österreichischen Methode sei für den Augenblick abgesehen — in den fertig hingeschriebenen, zu subtrahierenden Teilprodukten besteht, so kann man immerhin einen großen Fortschritt in diesem Rechenbild erblicken. Ein Vorteil ist übrigens bei dieser

Anordnung sogar vorhanden, der den Nachteil, der in der etwas geringeren Uebersichtlichkeit liegt, aufzuwiegen vermag; bei dieser Anordnung der Teilprodukte kann man in jedem Stadium der Rechnung eine Controlle haben, die Summe der Teilprodukte, vermehrt um die letzte obere Reihe muß stets den Dividenden ergeben. Diese Controlle ist weder bei unsrer noch bei der sog. österreichischen Methode so übersichtlich (vgl. dazu Anm. 51 und das Rechenbild Seite 88).

Obgleich aber das Schema der Division im großen und ganzen dem unsrigen entspricht, ist in der Ausführung doch eine Eigentümlichkeit, die uns fremd vorkommt, es ist die Möglichkeit, bei zwei aufeinanderfolgenden Teildivisionen Zahlen derselben Dekade zu erhalten, indem nach Subtraktion des Teilprodukts noch mehr als der Divisor übrig bleibt. Es beruht das darauf, daß zunächst mit einem zu groß genommenen Nährungswert des Divisors ein zu klein genommener des Dividenden geteilt wird. (Vgl. Anm. 58).

Sehr ausführlich und breit ist die Bruchrechnung behandelt, die sich an die Frage nach der Bedeutung und der Behandlung eines bei einer Division übrig bleibenden Restes anschließt. An die Spitze gestellt ist die Multiplikation von Brüchen mit ganzen Zahlen, es folgt die von Brüchen mit Brüchen, an die sich folgerichtig die Behandlung von Doppel- und mehrfachen Brüchen anschließt. Dann folgt die Addition ungleichnamiger Brüche, bei der das Gleichnamigmachen durch Aufsuchen des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner, des Generalnenners, als bekannt vorausgesetzt wird. Dann kommt eine Anweisung für alle möglichen Fälle, den Nenner kleiner zu machen, wobei das eigentliche Kürzen, wie wir es kennen, auch berührt wird, für gewöhnlich aber werden im Resultat Doppel- und mehrfache Brüche beibehalten. Den Uebergang zur Division von Brüchen durch einander bildet eine zweite Lösung der Aufgabe, eine Summe von Ganzen und ungleichnamigen Brüchen mit einer solchen Summe zu multiplizieren, die durch Erweitern des Multiplikators und Multiplikanden mit dem Generalnenner und durch Division des Produkts mit dem Quadrat des Generalnenners ausgeführt wird. So werden die Brüche bei der Division gleichfalls gleich-

namig gemacht und der Zähler des Dividendenbruches durch den des Divisorbruchs geteilt.

Sehr verschieden davon ist die Behandlung der Sexagesimalbrüche sowohl in der Multiplikation wie in der Division, bei denen so wie bei ganzen Zahlen, mutatis mutandis, verfahren wird, so daß es in der Tat wunderbar erscheint, daß der Schritt, zu den Dezimalbrüchen überzugehen, nicht getan wird. Der senkrechte Strich zwischen den Ganzen und den Brüchen, der sich schon in dem Schema der Addition findet und unserm Komma entsprechen würde, hat bei Gersonides nur den Zweck, anzudeuten, daß die Einheit nach links eine Potenz von 10, nach rechts eine Potenz von 60 ist, und die Rechnung nicht falsch werden zu lassen — שלא יתבלבל עליך החשבון —. Ob die Schreibweise, die in den Handschriften in dem Teil, der die Radizierung behandelt, gewählt ist, und die schon eine positionsartige ist, von Levi selbst herrührt oder von der weiteren Entwickelung beeinflußt ist, kann natürlich nicht festgestellt werden.

In diesem letzten Teil des 5ten Kapitels behandelt unser Autor das Ausziehen der Quadrat und Kubikwurzel, die er als eine Teilung durch einen unbekannten Divisor der Division anschließt. Er geschieht durch den heute gebräuchlichen Algorithmus, der auf der Bildung von $(a+b)^2$ bezw. $(a+b)^3$ beruht, jedoch noch nicht so, daß jedesmal direkt $(2a+b) . b$ gebildet wird, vielmehr werden $2ab+b^2$ besonders berechnet, addiert und dann abgezogen. Eigentümlich ist beim Aufsuchen der zweiten und folgenden Stellen der Kubikwurzel das eingeschlagene Verfahren, das in Anm. 62 kurz besprochen ist, und das sich aus der Art der Division überhaupt ergibt. Ueber die scheinbar vereinfachte Methode des Ausziehens sowohl der Quadrat- als der Kubikwurzel durch Multiplikation des Radikanden mit 36″ bezw. mit 3‴ 36″ siehe Anm. 61 und Cantor, Vorlesungen über die Geschichte der Mathemathik Bd. I Cap. 24. An das Ausziehen der Wurzeln knüpfen sich dann noch die praktischen Aufgaben, eine mittlere Proportionale zwischen zwei Zahlen a und b zu suchen, bezw. zwei Zahlen zwischen a und b einzuschalten, so daß $a : x = x : y$ und $x : y = y : b$ ist, das leitet zum 6ten Kapitel, den Proportionen über, das des Besondern nichts bietet, wenn auch die Proportionen deshalb eine

so große Rolle spielen, weil fast alle Beweise auf sie zurückgeführt werden und fast alle Rechnungsarten auf sie zurückgreifen, vgl. Schluß der Einleitung des zweiten Abschnitts.

Erst wenn wir so den zweiten Abschnitt des Werkes kennen, verstehen wir, wie bereits bemerkt, die Anordnung des ersten Teils, der nun als ein streng methodisch vorgehender erscheint. Für Addition und Subtraktion bedurfte es keiner besonderen theoretischen Erörterungen, er wird dort nur das Axiom gebraucht, daß das Ganze gleich der Summe seiner Teile ist, deshalb ist im ersten Abschnitt von Addition und Subtraktion nicht die Rede. Wohl aber mußte eine Reihe von Sätzen für die Multiplikation und Division aufgeführt werden. Das geschieht in Nr. 1—13, Sätzen, die sich zunächst mit der Multiplikation von Polynomen befassen, resp. die Absonderung gemeinsamer Faktoren aus der Summe mehrerer Produkte zum Gegenstand haben, dann weiter dem Beweise gelten, dass die Reihenfolge der Faktoren in einem Produkte gleichgültig ist. Für a . b=b . a ist der Satz ohne Beweis in Nr. 1 ausgeführt (siehe Anm. 8), für diesen Fall findet er sich bei Euklid ja auch schon in arithmetischer Form, bewiesen ist er zunächst für 3, dann für 4 Faktoren, dann für das Produkt zweier Produkte aus je zwei Faktoren, um dann schließlich verallgemeinert zu werden. Die Form der Sätze ist schon hier eine rein arithmetische, wenn man von dem zum festen terminus gewordenen שטח (Flächenzahl-Produkt) absieht, auch die Beweise sind nur in sofern in geometrisches Gewand gekleidet, als die Zahlen durch Linien dargestellt sind, in den späteren Sätzen wird vielfach auch auf dieses Hilfsmittel verzichtet und mit den abstrakten, n . b . unbestimmten, Zahlen operiert. Zwei Sätze, die der Multiplikation von Brüchen gelten und die in der Form von Sätzen über zusammengesetzte Verhältnisse erscheinen, zwei Sätze über Primenzahlen, relative und absolute, und zwei weitere über die Gleichheit der Resultate bei verschiedener Anordnung mehrerer Operationen gehören dann auch noch zur theoretischen Begründung des im zweiten Teil für die Multiplikation und Division Gebrauchten.

Wenn nun diese Sätze auch nicht alle direkt im zweiten Abschnitt in praktischen Beispielen verwendet werden, so sieht man doch leicht ein, dass sie dem praktischen Rechnen dienen sollen, man wird ohne große Mühe finden, wo sie zur Anwendung

gelangen können. Im übrigen bieten sie wohl nichts, was über das schon im ganzen Mittelalter, ja schon im Altertum Bekannte hinausgeht. Daß hier im theoretischen Teil die zum Gebiete der Division gehörigen Sätze vorausgenommen sind, während der zweite Abschnitt die Division und Bruchrechnung erst in das fünfte Kapitel verweist und Reihensummation und Combinatorik vorweg nimmt, weil sie „Verbindungen“ sind, darf nicht Wunder nehmen, es sind hier eben theoretische Grundlagen, die in mehrere Gebiete hinüberspielen und die bei der ersten Gelegenheit abgetan werden, Grundlagen, von denen unser Autor in der Einleitung sagt, wer sie kennt, vermöchte mit der einen Kenntnis den Aufbau der Operation in den vielen Arten zu erkennen, deren Ausführung dieselbe Grundlage hat.

In den nun folgenden Sätzen 21—43 werden die Grundlagen für das dritte Kapitel des zweiten Abschnittes gegeben. Schritt für Schritt vorgehend und alles Folgende im Früheren vorbereitend, bringt Gersonides hier die streng mathematischen Beweise für manche neue und manche schon früher durch Induktion gefundene Resultate. Die Summenformel für eine Anzahl von Gliedern der natürlichen Zahlenreihe, für eine Anzahl auf einander folgender grader und ungrader Zahlen wird abgeleitet, die Quadrate der natürlichen Zahlenreihe werden summiert, ebenso getrennt die Quadrate der graden und ungraden Zahlen, endlich mit Hülfe von figurierten Zahlen von der Form $\sum_{n}^{1} p\left[n+(n-1)+\cdot\cdot\cdot\cdot 1)\right]$, die der archimedischen Reihe der Quadratzahlen entsprechen und mit entsprechenden Dreieckszahlen verbunden werden, auch die Kuben der Zahlen der natürlichen Reihe sowohl als auch die der graden und ungraden Zahlen für sich allein. Es scheint, daß hier diese Ableitung zum ersten Male gegeben wird, und die Anfrage des Herrn Eneström in den Bibliotheca Mathematica, Neue Folge 1902, dürfte damit beantwortet sein.

Galten die bisherigen Sätze durchweg dem zweiten Abschnitte des Werks und den dort zu lösenden Aufgaben, so folgen jetzt einige, die der Lösung von Aufgaben gelten, die im ersten Teile selbst noch behandelt werden. Man sieht leicht, daß sie nur zu dem Zwecke aufgestellt sind, fast scheint es, als seien sie eigent-

lich nur Resultate bezw. Teilresultate der von Nr. 52 an folgenden Aufgaben, die für uns dadurch an Interesse verlieren, weil der Weg, auf dem sie gefunden sind, nicht angegeben wird. Es wird die Lösung einfach mitgeteilt und deren Richtigkeit bewiesen. Erst die Sätze 59 ff. haben wieder deutlichen Bezug auf den zweiten Abschnitt, sie behandeln Dinge, die bei der Radizierung gebraucht werden, die Gleichheit von $a^2 . b^2$ bezw. $a^3 . b^3$ und $(ab)^2$ bezw. $(ab)^3$ und die Formel $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$. Gerade die Stellung dieser letzten Sätze lässt in der Tat die Vermutung aufkommen, dass der zweite Abschnitt vielleicht vor dem ersten bearbeitet wurde und dieser erst aus den in der Einleitung angegebenen Gründen später vorausgeschickt wurde. Diese Sätze, die eigentlich zu den 1—13 aufgeführten gehörten, werden erst am Schlusse des 5ten Kapitels des 2ten Abschnitts verwendet und haben am Ende daher erst ihre spätere Stellung bekommen.

Wichtiger ist der Schluss des ersten Abschnitts, der durch eine besondere Einleitung kenntlich gemacht ist, und dessen Stellung am Ende des Teils sich auch erklären läßt, wenn die soeben ausgesprochene Vermutung richtig sein sollte. Es sind Sätze aus dem Gebiet der Combinatorik, also aus einem Gebiet, das zum eigentlichen praktischen Rechnen nicht gehört. Wenn nun auch im zweiten Teil die Combinatorik, als zu den Operationen der „Verbindung" gehörend, schon im Kap. 4 behandelt wird, so sind in ihr doch neue Rechnungsarten nicht enthalten, Kap. 4 bringt eben nur die Beispiele für die theoretisch abgeleiteten Sätze, die daher im ersten Teil, weil sie für das eigentliche Rechnen nicht grundlegend sind, an den Schluß gestellt werden.

Immerhin bieten sie für die Geschichte der Mathematik des Interessanten genug. Nach Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, Bd. II S. 352, wären im Abendlande kombinatorische Kenntnisse nur ganz vereinzelt gewesen, erst bei Hérigone (1634) soll sich die Combinationsformel $\frac{n(a-1) \cdot \cdot \cdot \cdot (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot \cdot m}$ finden, wir haben sie hier schon 2 Jahrhunderte früher, auch den Satz $C_n^k = C_n^{(n-k)}$ haben wir schon. Es wird zwischen Permutationen, Variationen, Combinationen unterschieden, die letzteren werden durch Permutation aus den Variationen hergeleitet. Die Bildungsweise der einzelnen Complexionen wird aber nicht angegeben.

Er erübrigt noch, einiges über die dieser Veröffentlichung zu Grunde liegenden Handschriften zu sagen. Zur Verfügung standen durch die freundliche Vermittelung der hiesigen Stadtbibliothek 3 Manuskripte, der Codex 35 der Münchner Hofbibliothek, ein Foliosammelband, in dem unser Maasei Choscheb allerdings nur lückenhaft vorhanden ist. In italienischer Cursivschrift geschrieben, bot er insofern manche Erleichterungen, daß die Aehnlichkeit des ב und כ sowie das ד und ר, die in den anderen Handschriften die manchmal störend wirkte, wo in den Rechnungen beide Zeichen vorkommen, hier wegfielen. Auch der Codex 67 der Münchner Hofbibliothek, gleichfalls Foliosammelband, ist lückenhaft, doch nur am Schlusse des zweiten Teils. Jedoch sieht man, daß keine Seite fehlt, der Abschreiber hat ein Stück des 5ten Kapitels und das ganze 6te fortgelassen. Die Lücken der anderen Handschrift rühren von fehlenden Seiten her. Er stammt aus dem Jahre 1573 und scheint mit der dritten benützten Handschrift in irgend welchem Zusammenhang zu stehen, einige, ganz offenbar fehlerhafte Lesarten stimmen in beiden sehr genau überein, wie man aus den Fußnoten zum hebr. Text ersehen kann. Die dritte Handschrift, die der Wiener Kgl. Bibliothek gehört, ist ein Quartband, in deutscher Cursivschrift geschrieben, aus dem Jahr 1462. Sie ist am vollständigsten, und ihr Text ist i. a. der Veröffentlichung zu Grunde gelegt. An das sechste Kapitel des 2ten Abschnitts schließt sich in ihr noch eine Reihe von שאלות, Aufgaben, an, deren drei letzte in der zweitgenannten Münchner Handschrift auch vorhanden sind. Wir mußten sie einer späteren Veröffentlichung vorbehalten, da es aus gewissen Gründen nicht möglich war, sie jetzt mit zu veröffentlichen. Es existieren noch einige handschriftliche Exemplare des Werkes, die leider nicht zugänglich waren. Durch die Freundlichkeit eines Kollegen war es zwar möglich, eine Stelle des Pariser Manuskripts zum Vergleich heranzuziehen, aber die Handschrift selbst konnte nicht nach Frankfurt gesandt werden. Die Münchner Codex 35 ist im folgenden mit M. I, der Nr. 67 mit M. II, die Wiener Handschrift mit W. bezeichnet, die Pariser Handschrift, die nur an einer Stelle in Betracht kommt und dort mit W. übereinstimmt, ist nicht besonders angegeben. Immer, wo die hebräischen Buchstaben unsern unbestimmten Zahlen a, b, c u. s. w. entsprachen,

sind sie, wie in den Hdschr., durch Punkte, die über den Buchstaben gesetzt wurden, kenntlich gemacht, da wo sie Zahlenwert haben, durch Striche links vom Buchstaben, so wie sie gewöhnlich bei Abbreviaturen geschrieben werden. Wo Zahlen im deutschen Text durch Linien dargestellt und diese durch 2 kleine lateinische Buchstaben benannt sind, macht ein Strich über den beiden Buchstaben dieselben kenntlich.

Früher als in Satz 21 des ersten Teils schien es nicht nötig, in der Uebersetzung irgendwelche, der modernen Weise entsprechende Ausdrücke bezw. Schreibweisen zu wählen, es war im Gegenteil das Bestreben vorhanden, den Text möglichst genau zu übertragen, selbst wenn der Ausdruck dadurch etwas schleppend wurde. Nur das Pluszeichen und das Zeichen für Verhältnisse wurden hier und da angewendet. Da jedoch, wo die rein arithmetische Darstellungsweise beginnt, besonders also bei den Sätzen, die der Summation von Reihen gelten, mußte häufiger die jetzt gebräuchliche Schreibweise gewählt werden, Klammern u. s. w., weil die Beweise für uns sonst zu unübersichtlich geworden wären. Im übrigen ist bei den Sätzen selbst stets darauf Bedacht genommen, sie möglichst wörtlich zu übertragen. Zwei Sachen habe ich mir dagegen willkürlich zu ändern gestattet. Die Figuren, die an vielen Stellen der Handschriften ganz weggelassen sind oder doch, im ersten Teil wenigstens, nur ganz willkürliche Linien sind, die den angegebenen Größen in keiner Weise entsprechen, habe ich in den Text so eingefügt, wie sie nach der Beschreibung sein mußten, und da, wo in den Manuskripten die Null durch einen leeren Platz bezeichnet ist, wurde sie sowohl im hebräischen als im deutschen Teil durch unser Symbol bezeichnet.

Es ist mir noch eine angenehme Pflicht, dem Herrn Direktor der hiesigen Stadtbibliothek und dem Herrn Bibliothekar Dr. Freimann sowie der Verwaltung der Kgl. Münchner und Königl. Kaiserlichen Wiener Hofbibliothek für die freundliche Besorgung und Ueberlassung der benützten Manuskripte, endlich Herrn Prof. Dr. A. Löwy-Freiburg für die Anregung zu dieser Arbeit herzlichen Dank zu sagen.

Es spricht Levi ben Gerschom: Da die rechte Vollkommenheit in einer praktischen Tätigkeit darin besteht, dass man neben der Tätigkeit die Art der Ausführung kennt, — warum sie gerade in dieser Weise geschieht —, und da der praktische Teil der Arithmetik (Zahlenwissenschaft) eine praktische Tätigkeit ist, so ist es klar, dass es am Platze ist, sich mit ihrer Theorie zu befassen. Ein zweiter Grund zwingt uns noch, in dieser Wissenschaft auf die Theorie einzugehen. Es ist nämlich klar, dass diese Wissenschaft viele Operationsarten umfasst und jede Art wieder sich mit den verschiedenartigsten Materien beschäftigt, so dass man glauben könnte, sie gehörten gar nicht einer Art an. Daher ist es klar, dass man es in dieser Wissenschaft nicht ohne die grössten Schwierigkeiten zu einer Vollkommenheit bringen kann, wenn man die Theorie nicht kennt, mit der Kenntnis der Theorie jedoch kann man leicht dazu gelangen, denn wer diese kennt, wird mit der einen Kenntnis den Aufbau der Operation in den vielen Arten erkennen, deren Ausführung ein und dieselbe Grundlage hat, wer aber die Theorie nicht versteht, wird, je nach der Verschiedenheit der Materien, in ein und derselben Kenntnis die verschiedensten Kenntnisse haben müssen. Demnach haben wir es für richtig gehalten, in diesem Werke die Eigenschaften der Zahlen in ihrer Theorie in Kürze auszuführen; wir haben dieses Werk daher in zwei Abschnitte geteilt. Der erste enthält die Grundlagen, die für das gelten, was wir von dieser Wissenschaft erläutern wollen, der zweite befasst sich mit dem Gang der Operation in den verschiedenen Arten der arithmetischen Wissenschaft und ihrer Begründung. Da dieses Werk sich mit praktischer und theoretischer (Denk) Tätigkeit befasst, nannten wir es „Maassei Choscheb.“ (Praxis des Rechners)[1]. Was aber den Lehrgang in diesem Buch

betrifft, so ist es richtig, dass der, der sich mit ihm befasst[2]), vorher sich mit dem 7ten 8ten und 9ten Buch der Euklid beschäftige, denn es ist nicht unsre Absicht, in diesem Buch seine Worte zu wiederholen[3]), wir werden sie vielmehr auf der Stufe von Grundsätzen belassen, da sie dort schon durch Beweise erläutert sind.

Einleitung des ersten Abschnitts.

Eine Zahl heisst aus mehreren Zahlen zusammengesetzt, wenn sie so gebildet ist, dass die erste mit der zweiten multipliziert wurde, das Resultat mit der dritten u. s. w. Die Anzahl der Zahlen und der gegebenen Teile ist die Anzahl der darin enthaltenen Zahlen und gegebenen Teile. Das zusammensetzte Verhältnis gegebener Zahlen zu gegebenen Zahlen ist das Verhältnis des ersten der Vorderglieder zu dem ersten der Hinterglieder, multipliziert mit dem Verhältnis der zweiten der Vorderglieder zum zweiten der Hinterglieder u. s. w. Die natürliche Zahlenreihe, die mit 1 beginnt, ist 1, 2, 3 u. s. w. Die Zahl vor einer Zahl ist die um 1 kleinere, die Zahl nach einer Zahl die um 1 grössere.

Die Summe der natürlichen Zahlenreihe bildet man, indem man zu 1 2, 3 u. s. w. addiert. Die Summe der ungraden natürlichen Zahlenreihe, die mit 1 beginnt, bildet man, indem man zu 1 3, 5 u. s. w. addiert. Die Summe der natürlichen graden Zahlenreihe bildet man, indem man zu 2, der ersten graden Zahl, 4, 6 u. s. w. hinzuzählt.

Eine arithmetische Reihe, ist eine Reihe, in der das 2te Glied um ebensoviel grösser ist als das erste, wie das 3te grösser ist als das 2te u. s. w.

Unter[4]) der Summe von Reihensummen, deren Anfänge der natürlichen Zahlenreihe entsprechen und die mit eins beginnen, versteht man die Summen von Aggregaten, die bei einer und derselben Zahl enden, deren erstes mit 1 beginnt, während das 2te mit 2 anfängt u. s. w.

Unter der Summe von Reihensummen[5]), deren Enden der natürlichen Zahlenreihe entsprechen, versteht man die Summen von Aggregaten, die alle mit eins beginnen, deren erstes 1 allein ist, während das zweite 1 plus 2, das dritte 1 plus 2 plus 3 u. s. w. heisst.

Eine Zahl ist das arithmetische Mittel zwischen 1 und einer gegebenen Zahl, wenn die gegebene Zahl sie um ebensoviel über-

trifft, wie sie mehr als 1 ist. Die gegebene Zahl ist die „Endzahl“ zu dieser gegebenen Zahl.

Die Zahlen zerfallen in grade und ungrade. Der Teil, dessen Nenner grösser ist, ist kleiner. Beispiel: $^1/_2$ ist grösser als $^1/_5$, und die Zahl, durch die $^1/_2$ benannt ist, 2, ist kleiner als 5, durch das $^1/_5$ benannt ist. Das zu beweisen, sei a eine beliebige Zahl, ihre Teile seien b und c, b sei grösser als c, d sei der Nenner des Bruches $\frac{a}{d}$, der gleich b ist, h der Nenner des Bruches h, der gleich c ist. Behauptung: d ist kleiner als h. Beweis: Da d der Nenner des Bruches $\frac{a}{d}$ ist, multipliziere man b mit d und erhält a, da ferner h der Nenner des Bruches $\frac{a}{h}$ ist, multipliziere man h mit c und erhält a, also ist b . d gleich h . c. Es stehen also die Faktoren in gleichem Verhältnis, b : c wie h : d. Nun ist aber b grösser c, also auch h grösser als d, w. z. b. w.

Ein Teil oder eine Summe von Teilen ist grösser als ein anderer Teil oder eine andere Summe von Teilen, wenn dieser Teil oder diese Summe von Teilen, voneiner beliebigen Zahl genommen, grösser ist als der andere Teil oder die Summe der anderen Teile, von eben dieser Zahl genommen. „Eins“[6] ist teilbar als benannte Zahl, das ist aber eine andere Seite als die Betrachtung der „Eins“ als einer unbenannten Zahl; dieses Buch jedoch befasst sich gleichmässig mit beiden Betrachtungen, daher soll es uns nicht stören, wenn „Eins“ in einigen Beweisen[7] des ersten Teils geteilt wird.

Erster Abschnitt:

behandelt die Grundlagen, die wir dieser Tätigkeit zu geben haben.

1. *In einem Produkt, das aus der Multiplikation zweier Zahlen entstanden ist, ist jede der Zahlen so oft enthalten, wie die andere Zahl Einheiten hat.*

2. *Wenn zwei Zahlen gegeben sind und man teilt die eine in beliebig viele Teile, so ist das Produkt der beiden Zahlen gleich der Summe der Produkte aus den Teilen der 2ten und der ersten.* Die gegebenen Zahlen seien a———h|———d|———b ———c———, $\overline{ab}$ und c, man teile $\overline{ab}$ in die Teile $\overline{ah}$, $\overline{hd}$, $\overline{db}$. Behauptung: $\overline{ab}$. c ist gleich der Summe der Produkte $\overline{ah}$. c, $\overline{hd}$. c und $\overline{db}$. c. Beweis: In

dem Produkt $\overline{ah} \cdot c$, ist der Faktor c so oft enthalten wie die Einheit in $\overline{ah}$, ebenso ist der Faktor c in dem Produkt $\overline{dh} \cdot c$ so oft enthalten wie die Einheit in $\overline{dh}$ und in dem Produkt $\overline{db} \cdot c$ so oft wie die Einheit in $\overline{db}$. In $\overline{ah}$, $\overline{hd}$ und $\overline{db}$ zusammen sind aber soviel Einheiten enthalten wie in $\overline{ab}$, also ist in der Summe der Produkte c als Faktor so oft vorhanden wie die Einheit in $\overline{ab}$. In $\overline{ab} \cdot c$ ist aber c so oft enthalten, wie $\overline{ab}$ Einheiten hat, also ist $\overline{ab} \cdot c$ gleich der Summe dieser Produkte.

3. Wenn 2 Zahlen gegeben sind und man teilt jede in beliebige Teile, so ist das Produkt der beiden Zahlen gleich der Summe der Produkte aus den Teilen der einen in jeden Teil der andern Zahl. a —— h —— b c —— s —— g —— d

Gegeben seien die Zahlen $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$, $\overline{ab}$ sei in die Teile $\overline{hb}$ und $\overline{ah}$ geteilt, $\overline{cd}$ in die Teile $\overline{cs}$, $\overline{sg}$, $\overline{gd}$. Behauptung: $\overline{ab} \cdot \overline{cd}$ ist gleich der Summe der Produkte aus $\overline{ah}$ in alle Teile von $\overline{cd}$, vermehrt um die Summe der Produkte von $\overline{hb}$ in alle Teile von $\overline{cd}$. Beweis: Die Summe der Produkte aus $\overline{ah}$ in alle Teile von $\overline{cd}$ ist gleich dem Produkt $\overline{ah} \cdot \overline{cd}$, ebenso ist die Summe der Produkte aus $\overline{hb}$ in alle Teile von $\overline{cd}$ gleich dem Produkt $\overline{hb} \cdot \overline{cd}$. Aber $\overline{ah} \cdot \overline{cd}$ vermehrt um $\overline{hb} \cdot \overline{cd}$ ist seinerseits gleich $\overline{ab} \cdot \overline{cd}$, also ist die Summe der Produkte aus allen Teilen von $\overline{ab}$ in alle Teile von $\overline{cd}$ gleich dem Produkt $\overline{ab} \cdot \overline{cd}$, w. z. b. w.

4. Teilt man eine Zahl in 2 Teile, so ist das Produkt aus der ganzen Zahl in den einen Teil gleich dem Produkte aus diesem Teil in den anderen, vermehrt um das Quadrat des ersten Teils. a|—— c ——|b Die Zahl $\overline{ab}$ sei in die beiden Teile $\overline{ac}$ und $\overline{cb}$ geteilt. Behauptung: Das Produkt aus $\overline{ab} \cdot \overline{bc}$ ist gleich dem Produkt $\overline{ac} \cdot \overline{cb}$ vermehrt um das Quadrat von $\overline{cb}$. Beweis: Das Produkt $\overline{ac} \cdot \overline{cb}$ vermehrt um das Produkt $\overline{cb} \cdot \overline{cb}$, das gleich dem Quadrat von $\overline{cb}$ ist, ist gleich dem Pro-

dukt $\overline{ab} . \overline{bc}$, also ist das Produkt $\overline{ab} . \overline{bc}$ gleich dem Produkt $\overline{ac} . \overline{bc}$, vermehrt um das Quadrat von $\overline{bc}$, w. z. b. w.

5. *Wird eine Zahl halbiert und um eine beliebige Zahl vermehrt, so ist das Produkt aus der hinzugefügten Zahl in die ganze — vermehrte — Zahl, vermehrt um das Quadrat der halben Zahl gleich dem Quadrat der Summe der halben Zahl und der hinzugefügten Zahl.* Die Zahl $\overline{ab}$ sei in die gleichen Teile $\overline{ac}$ und $\overline{cb}$ geteilt, hinzugefügt wird die Zahl $\overline{bd}$. Behauptung: Das Produkt $\overline{ad} . \overline{bd}$,

a ——— c ——— b ——— d

vermehrt um das Quadrat von $\overline{cb}$, ist gleich dem Quadrate von $\overline{cd}$. Beweis: Das Produkt $\overline{ad} . \overline{bd}$ ist gleich $\overline{cd} . \overline{db}$, vermehrt um $\overline{db} . \overline{ac}$, welches letztere gleich $\overline{bc} . \overline{db}$ ist. Addiert man dazu das Quadrat von $\overline{cb}$, so ist die Summe gleich der Summe der Produkte $\overline{cd} . \overline{db}$ und $\overline{bc} . \overline{db}$, vermehrt um das Quadrat von $\overline{cb}$. Nun ist aber das Produkt $\overline{cd} . \overline{cd}$ gleich der Summe der Produkte $\overline{cd} . \overline{db}$ und $\overline{cd} . \overline{cb}$, $\overline{cb} . \overline{cd}$ ist gleich $\overline{cb} . \overline{bd}$, vermehrt um das Quadrat von $\overline{cb}$, also ist das Quadrat von $\overline{cd}$ gleich der Summe aus den Produkten $\overline{cd} . \overline{db}$, $\overline{cb} . \overline{db}$ und dem Quadrat von $\overline{bc}$, dieses ist aber nach dem, was wir bewiesen, gleich dem Produkt $\overline{ad} . \overline{bd}$, vermehrt um das Quadrat von $\overline{bc}$, w. z. b. w.

6. *Addiert man zu einer gegebenen Zahl eine beliebige Zahl, so ist das Quadrat der Summe gleich der Summe der Quadrate der Zahlen, vermehrt um ihr doppeltes Produkt.* Gegeben sei die Zahl $\overline{ab}$, addiert werde $\overline{bc}$. Behauptung: Das Quadrat von $\overline{ac}$ ist gleich der Summe der Quadrate von $\overline{ab}$ und $\overline{bc}$, vermehrt um das doppelte Produkt aus $\overline{ab}$ und $\overline{bc}$. Beweis: Das Produkt $\overline{ac} . \overline{ac}$ ist gleich dem Produkt $\overline{ab} . \overline{ac}$, vermehrt um das Produkt $\overline{bc} . \overline{ac}$. Nun ist aber

a ——— b ——— c

$\overline{ab} . \overline{ac}$ gleich dem Produkt $\overline{ab} . \overline{bc}$, vermehrt um das Quadrat von $\overline{ab}$. Ferner ist $\overline{bc} . \overline{ac}$ gleich dem Produkt $\overline{bc} . \overline{ab}$, vermehrt um das Quadrat von $\overline{bc}$. Also ist das Quadrat von $\overline{ac}$

gleich der Summe der Quadrate von $\overline{ab}$ und $\overline{bc}$, vermehrt um das doppelte Produkt aus $\overline{ab}$ und $\overline{bc}$, w, z. b. w.

7. *Addiert man zu einer beliebigen Zahl eine beliebige andere, so ist das Quadrat der Summe gleich dem Produkt aus der Summe in eine der beiden Zahlen, vermehrt um das Produkt der beiden Zahlen und das Quadrat der zweiten.* Gegeben sei die Zahl $\overline{ab}$, a ——— b ——— c sie werde vermehrt um $\overline{bc}$. Behauptung: Das Quadrat von $\overline{ac}$ ist gleich dem Produkt $\overline{ab} . \overline{ac}$, vermehrt um das Produkt $\overline{ab} . \overline{bc}$ und das Quadrat von $\overline{bc}$. Beweis: Das Produkt $\overline{ac} . \overline{ac}$ ist gleich der Summe der Produkte $\overline{ac} . \overline{ab}$ und $\overline{bc} . \overline{ab}$, das letztere ist aber gleich dem Produkte $\overline{ab} . \overline{bc}$ vermehrt um das Quadrat von $\overline{bc}$, also ist das Quadrat von $\overline{ac}$ gleich der Summe aus den Produkten $\overline{ab} . \overline{ac}$ und $\overline{ab} . \overline{bc}$ und dem Quadrat von $\overline{bc}$, w. z. b. w.

8. *Das Quadrat der Hälfte einer beliebigen Zahl ist gleich dem Produkt aus einem beliebigen Teil der Zahl in den Rest, vermehrt um das Quadrat der Differenz zwischen einem beliebigen der Teile und der halben Zahl.* Die gegebene Zahl sei durch $\overline{ab}$ dargestellt, sie sei im Pudukte c halbiert und in einem beliebigen Produkte d geteilt. a ——— c ——— d ——— b Behauptung: Das Quadrat von $\overline{ac}$ ist gleich der Summe des Produktes $\overline{ac} . \overline{db}$ und des Quadrates von $\overline{cd}$. Beweis: Das Quadrat von $\overline{ac}$ ist gleich der Summe der Produkte $\overline{cd} . \overline{ac}$ und $\overline{db} . \overline{ac}$. Nun ist das Produkt $\overline{ad} . \overline{bd}$ gleich der Summe der Produkte $\overline{ac} . \overline{db}$ und $\overline{cd} . \overline{bd}$. Ziehen wir das gemeinschaftliche Produkt $\overline{ac} . \overline{db}$ ab, so ist das, was von dem Quadrat von $\overline{ac}$ bleibt gleich, dem Produkt $\overline{cd} . \overline{ac}$, welches gleich dem Produkt $\overline{cd} . \overline{cb}$ ist. Von dem Produkt $\overline{ad} . \overline{db}$ bleibt das Produkt $\overline{cd} . \overline{db}$. Nun ist aber der Unterschied zwischen dem Produkt $\overline{cd} . \overline{cb}$ und dem Produkt $\overline{cd} . \overline{db}$ gleich dem Quadrat von $\overline{cd}$. Also muss das Quadrat von $\overline{ac}$ gleich sein

dem Produkte $\overline{ad} . \overline{db}$, vermehrt um das Quadrat von $\overline{cd}$, w. z. b. w.

9. [8]) Wenn man eine aus zwei Zahlen zusammengesetzte Zahl mit einer Zahl multipliziert und das Resultat eine gewisse Zahl ist, so erhält man dieselbe Zahl als Resultat, wenn man die aus zwei beliebigen dieser 3 zusammengesetzte Zahl mit der dritten multipliziert. Die Zahl a sei mit dem Produkt aus b und c multipliziert, das Resultat sei die durch $\overline{dh}$ dargestellte Zahl. Behauptung: Multipliziert man b mit dem Produkt a . c, so ist das Resultat gleichfalls $\overline{dh}$. Beweis: In der Zahl $\overline{dh}$ ist das Produkt b . c so oft als Faktor enthalten, wie a Einheiten hat. Teilen wir nun $\overline{dh}$ durch das Produkt b . c, und es seien seine Teile, die dem Produkt b . c gleich sind, die Teile $\overline{ds}$, $\overline{sg}$, $\overline{gh}$. Die Anzahl dieser Teile wird dann gleich der d——s——g——h Anzahl der Einheiten von a sein. Klar ist es nun, daß jeder dieser Teile $\overline{ds}$, $\overline{sg}$, $\overline{gh}$, b so oft als Faktor enthält als c angibt, da jeder gleich dem Produkte b . c ist. Nun enthält $\overline{dh}$ als Ganzes den Faktor b so oft wie alle seine Teile zusammen, in den Teile zusammen ist er aber so oft enthalten, wie ihre Anzahl, multipliziert mit c, angibt, und ihre Anzahl ist gleich der Anzahl der Einheiten von a. Also ist b . d in dem ganzen $\overline{dh}$ so oft enthalten, wie das Produkt a . c angibt. Multipliziert man demnach die Zahl b mit dem Produkt a . c, so erhält man $\overline{dh}$, w. z. b. w. Ebenso wird man beweisen, daß das Resultat $\overline{dh}$ erhalten wird, mit welcher Zahl von diesen dreien auch immer man das Produkt der beiden andern multipliziert.

10. Multipliziert man eine aus 3 gegebenen zusammengesetzte Zahl mit einer Zahl, und ist das Ergebnis irgend eine Zahl, so erhält man dieselbe Zahl, wenn man die aus den 3 übrigen zusammengesetzte Zahl mit irgend einer dieser Zahlen multipliziert. Die aus den Zahlen c, d, h zusammengesetzte Zahl werde mit a multipliziert, es ergebe sich $\overline{sg}$. Behauptung: Multipliziert man die

aus den Zahlen a, c, h zusammengesetzte Zahl mit d, so ist das Resultat gleichfalls $\overline{sg}$. Beweis: Wir teilen $\overline{sg}$ in Teile, die der aus den Zahlen c, d, h zusammengesetzten Zahl gleich sind, seine Teile seien, $\overline{st}$, $\overline{tl}$, $\overline{lg}$. Siehe, die Anzahl dieser Teile ist gleich der Anzahl der Einheiten

s —— t —— l —— g

von a, weil $\overline{sg}$ die aus den Zahlen c, d, h zusammengesetzte Zahl a mal als Faktor enthält, und jeder dieser Teile $\overline{st}$, $\overline{tl}$, $\overline{lg}$, enthält d so oft als Faktor, wie das Produkt c . h angibt, das ist im Vorigen erläutert. $\overline{sg}$ als Ganzes enthält d so oft als Faktor wie alle seine Teile zusammen, die Teile zusammen enthalten d aber so oft, wie das Produkt c . h, multipliziert mit a, angibt. Also enthält $\overline{sg}$ als Ganzes den Faktor d so oft, wie die aus a, c, h zusammengesetzten Zahl angibt, also ist das Produkt aus d und der aus a, c, h zusammengesetzten Zahl auch $\overline{sg}$. Mit solchem Weitergehen beweist man es ohne Ende, das soll sagen, wenn eine aus 4 Zahlen zusammengesetzte Zahl mit einer Zahl multipliziert wird und das Ergebnis ist eine gewisse Zahl, so erhält man dieselbe Zahl, wenn man die aus den vier übrigen Zahlen zusammengesetzte Zahl mit einer beliebigen von diesen multipliziert. Deshalb enthält auch die Zahl, die sich aus der Multiplikation einer Zahl und der aus den übrigen zusammengesetzten ergibt, jede beliebige dieser Zahlen so oft als Faktor, wie die aus den übrigen zusammengesetzte angibt.

11. Multipliziert man eine aus 3 Zahlen zusammengesetzte mit einer beliebigen Zahl, und ist das Ergebnis irgend eine Zahl, so erhält man dieselbe Zahl als Resultat, wenn man die aus den übrig gebliebenen Zahlen zusammengesetzte mit der aus zweien von diesen Zahlen gebildeten multipliziert. Die aus den Zahlen c, d, h, gebildete Zahl werde mit a multipliziert, das Ergebnis sei $\overline{sg}$. Behauptung: Multipliziert man das Produkt c.h mit dem Produkt a.d, so ist das Resultat auch $\overline{sg}$ Beweis: Wir teilen $\overline{sg}$. in Teile, die der aus c, d, h zusammengesetzten Zahl gleich sind, die Teile seien $\overline{st}$, $\overline{tl}$, $\overline{lg}$.

s —— t —— l —— g   —— a —— c —— d —— h

Die Zahl jener Teile ist gleich der Anzahl der Einheiten von a,

und jeder dieser Teile enthält das Produkt c.h so oft, wie d Einheiten hat. Nun enthält $\overline{sg}$ das Produkt c.h so oft als Faktor wie seine Teile zusammen, die Teile zusammen aber enthalten es so oft, wie ihre Anzahl, multipliziert mit d, angibt, nun ist aber ihre Anzahl gleich der Anzahl der Einheiten von a, also ist das Produkt c.h in $\overline{sg}$ so oft als Faktor enthalten, wie das Produkt a.d angibt. Multipliziert man also das Produkt c.h mit dem Produkte a.d, so ist das Resultat $\overline{sg}$. Und so wird bewiesen, dass das Resultat gleichfalls $\overline{sg}$ sein wird, wenn man die aus den 2 übrig gebliebenen Zahlen zusammengesetzte Zahl mit der aus 2 beliebigen von diesen zusammengesetzten multipliziert. Und mit genau demselben Beweis wird gezeigt, dass das Resultat dieselbe Zahl ergibt, wenn man eine aus 4 Zahlen zusammengesetzte Zahl mit einer beliebigen Zahl multipliziert, eine Zahl als Ergebnis erhalten hat, und dann die aus den 3 übrigbleibenden Zahlen gebildete mit der aus 2 beliebigen von ihnen zusammengesetzten Zahl multipliziert. Und so ist das durch denselben Beweis ohne Ende dargelegt. Und deshalb enthält das Resultat die aus 2 beliebigen der Zahlen zusammengesetzte Zahl so oft als Faktor, wie die aus den übriggebliebenen gebildete Zahl Einheiten besitzt, w. z. b. w.

12. Multipliziert man eine aus beliebig vielen Zahlen zusammengesetzte mit einer beliebigen Zahl und erhält man eine Zahl als Resultat, so erhält man dieselbe Zahl als Ergebnis, wenn man mit der aus beliebigen von diesen Zahlen zusammengesetzten die aus den übrig bleibenden zusammengesetzte multipliziert. Es werde die aus b, c, d, h, s, g zusammengesetzte Zahl mit a multipliziert, das Resultat sei $\overline{tk}$. Behauptung: Multipliziert man die aus den Zahlen a, d, g zusammengesetzte Zahl mit der aus den Zahlen b, s, h, g zusammengesetzten, so ist das Resultat gleichfalls $\overline{tk}$. Beweis: $\overline{tk}$ enthält die aus b, c zusammengesetzte Zahl so oft, wie die Einheiten der aus a, d, h, s, g, zusammengesetzte Zahl angeben. Teilen wir nun $\overline{tk}$ in Teile, die der aus a, d, h, s, g zusammengetzten Zahl gleich sind, die Teile seien $\overline{tl}$, $\overline{lm}$, $\overline{mz}$, $\overline{zk}$, so ist die Anzahl dieser Teile gleich der Anzahl der Einheiten von b . c. Jeder dieser Teile enthält aber

a. d. g so oft als Faktor, wie das Produkt h. s Einheiten hat, da jeder von ihnen gleich a. d. h. s. g ist. Nun enthält $\overline{tk}$ als Ganzes a. d. g so oft als Faktor, wie das Produkt h. s. multipliziert mit ihrer Anzahl, die gleich dem Produkt b. c ist, angibt, Das Resultat ist aber, wie schon gezeigt, die Zahl, die aus den Zahlen b, c, h, s zusammengesetzt ist. Also enthält $\overline{tk}$ als Ganzes die aus a, d, g zusammengesetzte Zahl so oft, wie die Einheiten in der aus b, c, h, s zusammengesetzten Zahl angeben. Multipliziert man also das Produkt a, d, g mit dem Produkt b, c, h, s, so ist das Resultat die durch $\overline{tk}$ dargestellte Zahl. Damit ist auch gezeigt, dass, wenn man die aus irgend welchen von diesen Zahlen zusammengesetzte Zahl mit der aus den übrigbleibenden gebildeten multipliziert, das Resultat auch $\overline{tk}$ ist. Und somit ist auch für jede Zahl, die sich aus beliebig vielen Zahlen zusammensetzt, gezeigt, dass das Ergebnis eben dieselbe Zahl ist, wenn man mit der aus irgend welchen Zahlen gebildeten Zahl, die aus den übrigbleibenden zusammengesetzte multipliziert. Deshalb enthält die resultierende Zahl auch die aus irgend welchen dieser Zahlen zusammengesetzte so oft als Faktor, wie die Anzahl der Einheiten der aus den übrigbleibenden gebildeten angibt, w. z. b. w.

l m z

f k

13. Das Verhältnis einer aus beliebig vielen Zahlen zusammengesetzten Zahl zu einer aus ebensovielen Zahlen zusammengesetzten ist gleich dem Verhältnis, das sich aus den Verhältnissen der Vorderglieder zu den Hintergliedern zusammensetzt. Die Zahl a sei aus den Zahlen b, c, d, h, s zusammengesetzt, g aus Zahlen t, k, l, m, n. Behauptung; Das Verhältnis a : g setzt sich aus 5 Verhältnissen, zusammen aus dem Verhältnis b : t, dem Verhältnis c : k, dem Verhältnis d : l, dem Verhältnis h : m und dem Verhältnis s : n. Beweis: Wir multiplizieren die aus c, d, h s, zusammengesetzte Zahl mit t, das Resultat sei x. Siehe, das Produkt c. d. h. s. wurde mit b multipliziert und ergab a und mit t multipliziert und ergab x; also verhält sich a : x wie b : t. Und ebenso multiplizieren wir die aus t, d, h, s, gebildete Zahl mit k, das Resultat sei y. Siehe, die Zahl

t.d.h.s wurde mit c muliplizierl und ergab x und mit k multipliziert und ergab y, also verhält sich x : y wie c : k. Ebenso multiplizieren wir die Zahl t.k.h.s mit l und setzen das Ergebnis gleich p, man zeigt dann wie vorher, dass y : p sich so verhält, wie d : l, ebenso multiplizieren wir die Zahl t.k.l.s mit der Zahl m, das Resultat sei z, und es zeigt sich gleichfalls, dass p : z sich verhält, wie h : m, und auf dieselbe Weise wird bewiesen, dass z : g sich wie s : n verhält. Und wenn die Sache so ist, ist es klar, dass sich das Verhältnis a : g aus 5 Verhältnissen zusammensetzt, aus a : x, aus x : y, aus y : p, aus p : z und aus z : g. Nun ist bereits gesagt, dass jedes dieser Verhältnisse gleich dem entsprechenden aus der Reihe der Verhältnisse der Zahlen b, c, d, h, s zu den Zahlen t, k, l, m, n ist; also setzt sich das Verhältnis a:g aus 5 Verhältnissen zusammen, aus dem Verhältnis b : t, dem Verhältnis c : k, dem Verhältnis d : l, dem Verhältnis h : m und dem Verhältnis s : n; w. z. b. w.[9])

14. Wenn ein Verhältnis sich aus beliebigen Zahlen als Vordergliedern und beliebigen Zahlen als Hintergliedern zusammensetzt und man die Ordnung entsprechender Glieder verändert, so dass die Vorderglieder Vorderglieder und die Hinterglieder Hinterglieder bleiben, so bleibt das zusammengesetzte Verhältnis gleich dem früheren Verhältnis. Es seien die Vorderglieder die Zahlen a, b, c, d, die Hinterglieder die Zahlen h, s, g, t, das Verhältnis, das sich aus a : h, b : s, c : g, d : t zusammensetzt, sei gleich k : l. Vertauscht man entsprechende Glieder und nimmt das Verhältnis, das sich aus a : g, b : h, c : t und dem Verhältnis d : s zusammensetzt, so ist dieses auch gleich dem Verhältnis k : l. Beweis: Wir nennen die Zahl, die sich aus den Zahlen a, b, c, d zusammensetzt, m; und die Zahl, die sich aus den Zahlen h, s, g, t zusammensetzt, n. Siehe, dann ist das Verhältnis m : n gleich dem Verhältnis, das sich aus den Zahlen a, b, c, d zu den Zahlen h, s, g, t zusammensetzt. Die Zahl, die sich aus h, s, g, t zusammensetzt, ist aber gleich der Zahl, die aus h, g, t, s gebildet wird. Nun ist das Verhältnis m : n gleich dem Verhältnis, das sich aus den Zahlen a, b, c, d zu den Zahlen h, g, t, s, zusammensetzt, also ist (nach der Einleitung des Euklid) das Verhältnis, das sich aus den Zahlen

a, b, c, d zu den Zahlen h, s, g, t zusammensetzt, gleich dem Verhältnis ist, das sich aus den Zahlen a, b, c, d zu den Zahlen h, g, t, s zusammensetzt, gleich dem Verhältnis k : l, also ist das zusammengesetzte Verhältnis der Zahlen a, b, c, d, zu den Zahlen g, h, t, s auch gleich dem Verhältnis k : l, was wir zeigen wollten. Hierdurch ist aber bewiesen, dass, wenn die Ordnung der Vorderglieder vertauscht wird, sie aber Vorderglieder bleiben, das zusammensetzte Verhältnis desselben bleibt, w. z. b. w.

15. Jede Zahl, die zu einer aus beliebigen gegebenen Zahlen zusammengesetzten Zahl prim ist, ist zu allen diesen Zahlen prim. Die Zahl a sei prim zu der Zahl h, die Zahl h sei aus den Zahlen b, c, d zusammengesetzt. Behauptung: a ist prim zu allen den Zahlen b, c, d. Beweis: Es ist anders unmöglich, denn wenn es möglich wäre, so mögen a und c einen gemeinsamen Faktor haben, dieser Faktor sei eine beliebige Zahl, die wir s nennen wollen. Nun ist aber c ein Faktor von h, denn es ist darin so oft enthalten, wie die Einheiten von b.d angeben, also ist auch s ein Faktor von h. Nach der Annahme war es aber auch ein Faktor von a, also hätten a und h einen gemeinschaftlichen Faktor, a sollte aber nach der Voraussetzung prim zu h sein — also ist die Annahme falsch, und a muss zu jeder der Zahlen b, c, d prim sein.

16. Jede Zahl, die prim zu allen Zahlen ist, die kleiner sind als die Quadratwurzel aus der zu ihr nächsten grösseren Zahl, ist eine Primzahl. Die Zahl a sei prim zu allen Zahlen, die kleiner sind als die Quadratwurzel aus b, der nächst grösseren Quadratzahl nach a, die Wurzel aus b sei c, die Primzahlen, die kleiner sind als c, seien d, h, s; a sei also prim zu jeder von ihnen. Behauptung: a ist eine Primzahl. Beweis: Gäbe es eine andere Möglichkeit, so müsste a durch einen Faktor g, teilbar sein. g sei in a so oft enthalten, wie die Anzahl der Einheiten von t angibt. Es ist nun klar, dass nicht beide Zahlen g und t grösser sein können als c, denn wenn das möglich wäre, könnte das Produkt g . t, das gleich a ist, nicht kleiner sein, als das Produkt c. c, welches gleich b ist, und es war doch vorausgesetzt, dass a kleiner sei als b, also wäre diese Annahme falsch, und also muss eine der

Zahlen g und t kleiner als c sein. Sei die Zahl, die kleiner als c ist, g, dann muss g entweder eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl sein. Wäre sie prim und kleiner als c, so wäre a nicht prim zu allen Primzahlen, die kleiner als c sind, und es war doch vorausgesetzt, dass sie prim zu allen wäre, also ist diese Annahme unmöglich. Wäre sie aber zusammengesetzt, so müsste sie unbedingt eine Primzahl als Faktor enthalten, die kleiner als g und daher auch kleiner als c ist. Und es ergäbe sich genau die vorige Ungereimtheit, also kann keine Zahl als Faktor in a enthalten sein, und daher ist a eine Primzahl; w. z. b. w.

17. Subtrahiert man von einer gegebenen Zahl einen beliebigen Teil oder beliebige Teile und zieht von dem Rest einen beliebigen andern Teil oder beliebige andere Teile desselben ab u. s. w., so ist der zuletzt übrig bleibende Rest derselbe und die Summe der abgezogenen Teile dieselbe, wenn die Reihenfolge vertauscht wird. Es sei a die gegebene Zahl, die Teile sollen die Nenner b, c, d haben. und zwar seien es $\frac{1}{b}$ von a, $\frac{h}{c}$ vom Rest und $\frac{s}{d}$ vom nächsten Rest. Behauptung: $\frac{1}{b}$ von a, $\frac{h}{c}$ vom Rest und $\frac{s}{d}$ von dessen Rest addiert, sind gleich $\frac{s}{d}$ von a, vermehrt um $\frac{1}{b}$ vom Rest und $\frac{h}{c}$ von dessen Rest. Beweis: Wir machen g = b — 1, machen ferner die Einheiten der Summe der Zahlen h und t = c und der Zahlen s und k = d. Es sei $\frac{1}{b}$ von a = p, es bleibe l übrig, dann seien $\frac{h}{c}$ von l = m, es bleibe n übrig; ferner seien $\frac{s}{d}$ von n = x, es bleiben y übrig. Ebenso seien $\frac{s}{d}$ von a = z, der Rest sei q, $\frac{1}{b}$ von q sei r, der Rest sei e, es seien $\frac{h}{c}$ von e = v, der Rest sei o. Behauptung: y ist = o. Beweis: Weil p gleich $\frac{1}{b}$ von a ist, enthält a soviel Teile p, wie b Einheiten hat, vermindert um 1, g ist aber = b — 1, also enthält l soviel gleiche Teile p wie g Einheiten. Also verhält sich a : l wie b : g, weil die Zahlen b bezw. g, mit p multipliziert, a bezw. l ergeben. Ebenso setzen wir $\frac{1}{b}$ von l = f, demnach enthält m so viele

gleiche Teile f wie h Einheiten, und deshalb enthält n so viele gleiche Teile f wie t Einheiten. Man beweist nun auf die vorige Weise, dass l : n sich wie c : t verhält, und ebenso beweist man, dass n : y sich wie d : k verhält, also ist das Verhältnis a : y aus dem Verhältnis der Zahlen b, c, d zu den Zahlen g, t, k zusammengesetzt. Ebenso beweist man, dass sich a : o aus dem Verhältnis der Zahlen d, b, c zu den Zahlen k, g, t zusammensetzt, aber das Verhältnis, das sich aus den Zahlen b, c, d zu den Zahlen g, t, k zusammensetzt, ist gleich dem Verhältnis, dass sich aus den Zahlen d, b, c zu den Zahlen k, g, t zusammensetzt, also ist das Verhältnis von p zu y und zu o dasselbe, also ist y = o. Deshalb muss auch die Summe der Zahlen p, m, x gleich der Summe der Zahlen z, r, v sein. Denn die Differenz zwischen a und y ist gleich der Summe von p, m, x, und die Differenz zwischen a und o ist gleich der Summe von z, r, v, es war aber bewiesen, dass y=o ist, also müssen die Summen von p, m, x und z, r, v gleich sein, w. z. b. w.

18. Multipliziert man eine gegebene Zahl mit einer beliebigen Zahl, zieht von dem Resultat der Multiplication einen gegebenen Teil oder gegebene Teile ab und setzt beide Operationen fort, so ist der letzte Rest derselbe, wenn man die Reihenfolge der Operationen vertauscht. Die gegebene Zahl sei a, sie werde mit b multipliziert, von dem Resultat werden $\frac{h}{c}$ weggenommen, von dem Rest $\frac{s}{d}$, es bleibe eine gewisse Zahl. Behauptung: Vertauscht man die Reihenfolge und nimmt $\frac{s}{d}$ von a fort, multipliziert den Rest mit b und nimmt von dem Resultat $\frac{h}{c}$ fort, so bleibt dieselbe Zahl übrig, die bei der ersten Anordnung übrig geblieben war. Beweis: Wir setzen 1 neben[10]) die Zahl b und setzen die Summe der Zahlen h und t = c und die Summe der Zahlen s und k = d. Es werde nun a mit b multipliziert, das Resultat sei l, es seien $\frac{h}{c}$ von der Zahl l = m, der Rest sei die Zahl n, es seien $\frac{s}{d}$ der Zahl n = x der Rest sei y. Ferner nehmen wir $\frac{s}{d}$ von a, das sei die Zahl p, der Rest sei z, z werde mit b multipliziert und ergebe q, es

seien $\frac{h}{c}$ von q = r, der Rest sei v. Behauptung y = v. Beweis: a wurde mit b multipliziert und ergab l. Also verhält sich a : l wie 1 : b. Man, zeigt nun nach dem vorhergehenden Beweis, dass l : n sich verhält wie c : t und n : y wie d : k. Also setzt sich das Verhältnis a : y zusammen aus dem Verhältnis der Zahlen 1, c, d zu den Zahlen b, t, k, Ebenso beweist man, dass das Verhältnis a : v sich aus dem Verhältnis der Zahlen d, 1, c zu den Zahlen k, b, t zusammensetzt. Aber das aus dem Verhältnis der Zahlen 1, c, d zu den Zahlen b, t, k zusammengesetzte Verhältnis ist gleich dem aus dem Verhältnis der Zahlen d, 1, c zu den Zahlen k, b, t zusammengesetzten, also ist das Verhältnis von a zu y und zu v dasselbe, also ist y = v, w. z. b. w. Wir haben nun 1 eine Zahl schlechthin genannt, obwohl es keine Zahl ist, denn[11]), was den Beweis betrifft, so ändert sich derselbe nicht, und das ist durch den Beweis in Nr. 13 dieses Abschnittes klargelegt.

19. *Wenn eine Zahl gegeben ist, so ist die Anzahl der Zahlen der Reihe von 1 bis zu dieser Zahl gleich der Anzahl der Einheiten, die in der gegebenen Zahl enthalten sind.* Die gegebene Zahl sei $\overline{ab}$. Behauptung: die Anzahl der Zahlen der bei 1 beginnenden Reihe bis zu der Zahl $\overline{ab}$ ist gleich der Anzahl der Einheiten, die in $\overline{ab}$ enthalten sind.

a c d h b

Beweis: Wir teilen $\overline{ab}$ in lauter der Einheit gleiche Teile und zwar $\overline{ac}$, $\overline{cd}$, $\overline{dh}$, $\overline{hb}$. Siehe $\overline{ab}$ ist = 1, und wenn man damit $\overline{cd}$ verbindet, welches der Einheit gleich ist, so stellt $\overline{ad}$ die auf $\overline{ac}$ folgende Zahl dar. Ebenso zeigt man, dass die Zahl $\overline{ah}$ die auf $\overline{ad}$ folgende und $\overline{ab}$ die auf $\overline{ah}$ folgende Zahl darstellt. Also bilden die Zahlen $\overline{ac}$, $\overline{ad}$, $\overline{ah}$, $\overline{ab}$ eine Reihe von Zahlen, die mit 1 beginnen und deren Anzahl der Zahl der Einheiten von $\overline{ab}$ gleich ist, w. z. b. w. Ebenso beweist man aus derselben Figur, dass die Zahl der Einheiten der letzten Zahl einer mit 1 beginnenden Reihe gleich der Anzahl dieser Zahlen ist.

20. *Wenn eine grade Zahl gegeben ist, so ist die Anzahl der ungraden Zahlen von 1 bis zu ihr, 1 mitgerechnet, gleich der Anzahl der graden Zahlen bis zu ihr.* $\overline{ab}$ sei eine grade Zahl. Be-

hauptung: die Zahl der graden Zahlen bis $\overline{ab}$ ist gleich der Anzahl der ungraden Zahlen bis $\overline{ab}$, 1 mitgerechnet. Beweis: Wir teilen $\overline{ab}$ in die Anzahl seiner Einheiten, es seien dieses $\overline{ac}$, $\overline{cd}$, $\overline{dh}$, $\overline{ab}$. Siehe, weil $\overline{ab}$ gerade ist, ist $\overline{ah}$ ungrade, da $\overline{ab}$ 1 mehr ist als $\overline{ah}$. Ebenso beweist man, dass $\overline{ad}$ grade und $\overline{ac}$ ungrade ist, $\overline{ac}$ ist aber 1, also ist die Zahl der graden Zahlen bis $\overline{ab}$ gleich der Zahl der ungraden, w. z. b. w. Aus dieser Figur ersieht man, dass, wenn eine ungrade Zahl gegeben ist, die Anzahl der ungraden Zahlen in der mit 1 beginnenden Reihe bis zu ihr um 1 grösser ist als die Anzahl der graden Zahlen, denn wenn wir diese gegebene ungrade Zahl weglassen, so ist die letzte Zahl grade, und die Anzahl der graden ist gleich der Anzahl der ungraden Zahlen, also ist jetzt die Anzahl der ungraden Zahlen um 1 grösser als die der graden.

21. *Folgt auf eine gegebene Zahl in der natürlichen Reihe eine Anzahl von Zahlen so hat die letzte Zahl so viel Einheiten mehr als die gegebene, wie die Anzahl der auf diese folgenden Zahlen angibt.* Auf die gegebene Zahl $\overline{ab}$ mögen der Reihe nach die Zahlen ac, ad, ah folgen, die Anzahl dieser Zahlen sei s. Behauptung: ah ist um s grösser ab. Beweis: Setzen wir die Anzahl der Zahlen bis zu ab gleich g, dann enthält ab g Einheiten. Nun ist die Zahl der Zahlen der natürlichen Reihe bis ah um s grösser als die Zahl der Zahlen der Reihe bis ab, also ist die Zahl der Zahlen bis ah gleich g+s, also die Anzahl der Einheiten von ah gleich der Summe aus g+s. Die Zahl der Einheiten von ab ist aber g, also ist ah um s grösser als ab, w. z. b. w.

22. *Wenn die Anzahl der Zahlen einer Reihe vor einer gegebenen Zahl gleich der Anzahl der auf sie folgenden ist, so ist die Differenz zwischen der gegebenen und der ersten Zahl der Reihe gleich der Differenz zwischen der letzten Zahl der Reihe und der gegebenen.* Die gegebene Zahl sei $\overline{ab}$, die Zahlen der Reihe vor ihr ac, $\overline{ad}$, $\overline{ah}$,

die Zahlen der Reihe nach ihr $\overline{as}$, $\overline{ag}$, $\overline{ab}$. Behauptung: Die Differenz zwischen ab und $\overline{ah}$ ist gleich der Differenz zwischen at und $\overline{ab}$. Beweis: Die Anzahl der Zahlen ah, ad, ac ist gleich der Anzahl der Zahlen as, ag, at, aber die Anzahl der Zahlen ad, $\overline{ac}$, ab ist auch

a h d c b s g t

gleich der der Zahlen ah, $\overline{ad}$, ac, also ist die Anzahl der Zahlen ad, $\overline{ac}$, ab gleich der der Zahlen as, ag, at. Aber die Differenz zwischen ab und ah ist gleich der Anzahl der Zahlen ad, ac, $\overline{ab}$, und die Differenz zwischen at und ab ist gleich der Anzahl der Zahlen as, ag, at, also ist die Differenz zwischen ab und ah gleich der zwischen at und $\overline{ab}$, w. z. b. w.

23. Wenn in der natürlichen Zahlenreihe die Anzahl der Zahlen vor einer gegebenen Zahl gleich der Anzahl der auf sie folgenden ist, so ist die letzte grade oder ungrade, je nachdem die erste es ist. Die gegebene Zahl sei d, die Zahlen vor ihr c, b, a, die folgenden h, f, g. Behauptung: Wenn a grade ist, so ist g grade, wenn a ungrade ist, so ist es auch g. Beweis: Die Differenz zwischen d und a sei t, demnach ist g um t grösser als d, also ist g um 2 t grösser als a. 2 t ist aber eine grade Zahl, also ist die Differenz zwischen g und a eine grade Zahl, deshalb ist g eine grade Zahl, wenn a grade ist, und eine ungrade Zahl, wenn a eine solche ist, w. z. b. w.

24. Wenn man 2 Zahlen addiert und die Differenz zwischen der einen und 1 ist gleich der Differenz zwischen einer beliebigen gegebenen Zahl und der zweiten, so ist die Summe der beiden Zahlen gleich der auf die gegebene folgenden Zahl.

a b

c d g s h

Es sei a soviel grösser als 1, wie b kleiner ist als die gegebene Zahl c. Die auf c folgende Zahl sei durch $\overline{dh}$ dargestellt. Behauptung: Die Summe von a und b ist gleich $\overline{dh}$. Beweis: Wir ziehen 1, das durch $\overline{sh}$ dargestellt ist, von $\overline{dh}$ ab, als Rest bleibt $\overline{sd}$ gleich c. Machen wir nun die Differenz zwischen c und b gleich $\overline{sg}$,

so bleibt $\overline{dg}$ gleich b, aber $\overline{gs}$ ist auch die Differenz zwischen a und 1, und $\overline{sh}$ ist gleich 1, also ist $\overline{hg}$ gleich a, $\overline{dg}$ war aber gleich b, also ist $\overline{dh}$ gleich der Summe von a und b, w. z. b. w.

25. *Wenn man 2 Zahlen addiert und die eine ist ebensoviel kleiner als eine gegebene Zahl, wie die zweite grösser ist als die gegebene Zahl, so ist die Summe gleich dem Doppelten der gegebenen Zahl.* Die gegebene Zahl sei b, die Differenz zwischen b und a sei gleich der Differenz zwischen $\overline{ch}$ und b. Behauptung: Die Summe von a und $\overline{ch}$ ist gleich zweimal b. Beweis: Trennen wir von $\overline{ch}$ seinen Ueberschuß über b, dieser sei $\overline{sh}$, so bleibt $\overline{cs}$ gleich b. Da nun $\overline{hs}$ auch die Differenz zwischen a und b ist, so addiert man $\overline{hs}$ zu a und erhält b. $\overline{cs}$ war aber auch gleich b. Also ist die Summe von a und $\overline{ch}$ gleich dem doppelten der Zahl b, w. z. b. w.

a

b c s h

26. *Addiert man, bei 1 anfangend, die Zahlen der natürlichen Reihe, und ist die Anzahl der addierten Zahlen grade, so ist die Summe gleich dem Produkt aus der halben Anzahl in die auf die letzte folgende Zahl.* Die Zahlenreihe sei a, b, c, d, h, f, die auf f folgende Zahl sei s, a sei 1 (1 soll in dieser ganzen Untersuchung schlechthin als „Zahl" betrachtet werden). Behauptung: Die Summe der Zahlen (a+b+c+d+h+f) ist gleich dem Produkt aus der Hälfte ihrer Anzahl und g. Beweis: Weil a=1 ist, ist f+a=s, die Differenz zwischen b und 1 ist aber gleich der Differenz zwischen f und h, nämlich 1, also ist die Summe b+h=s. Ebenso beweist man, dass die Differenz zwischen c und 1 gleich der Differenz zwischen f und d ist, nämlich 2, also ist c+d=s. Also ist in der Summe (a+b+c+d+h+f) der Faktor s so oft enthalten wie die Hälfte der Anzahl der Zahlen a, b, c, d, h, f, denn die Summe von je zweien dieser Zahlen enthält s einmal, w. z. b. w. Klar ist es aber, dass dieser Beweis für die unendliche Reihe der Zahlen gilt, und zweifellos, dass man bei diesem Verfahren [12]) zuletzt zu 2 auf einander folgenden Zahlen gelangt, wie es c und d in unsrem Beispiele sind. Denn wäre es anders möglich, so müsste

schliesslich eine Zahl zwischen ihnen sein, dann müsste also die grössere um 2 grösser sein als die zu ihr gehörige. Nennen wir nun die Differenz zwischen der letzten Zahl der Reihe und der grösseren dieser 2 Zahlen t, so wird die kleinere dieser beiden zusammengehörigen Zahlen um t grösser sein als 1. Da nun die grössere Zahl die kleinere um 2 übertraf, muss sie 1 um t+2 übertreffen. Nun war aber das Endglied um t grösser als die grössere, folglich muss das Endglied um 2 t+2 grösser sein als 1. Aber 2 t+2 ist eine grade Zahl, also wäre die Differenz zwischen dem Endglied und 1 eine grade Zahl, demnach wäre das Endglied ungrade, das streitet aber gegen die Voraussetzung, also muss man zuletzt zu 2 auf einander folgenden Zahlen gelangen, und somit ist der Satz als wahr bewiesen.

27. Addiert man die Zahlen der natürlichen Reihe — 1 dazu gerechnet — und ist die Anzahl der addierten Zahlen ungrade, so ist das Ergebnis gleich dem Produkt der mittleren Zahl in die letzte. Die Reihe sei a, b, c, d, h, f, s; a sei gleich 1. Behauptung: (a+b +c+d+h+f+s) ist gleich dem Produkt d . s. Beweis: Die Differenz zwischen d und c ist gleich der Differenz zwischen h und d, also ist c+h=2 d. Ebenso ist die Differenz zwischen d und b gleich der Differenz zwischen f und d, also ist b+f=2 d. Ebenso zeigt man, dass a+s=2 d ist. Also enthält die Summe (a+b+c+d+h+f+s) den Faktor d so oft, wie die Anzahl dieser Zahlen angibt, weil je 2 von ihnen d zweimal enthalten und d sich selbst einmal enthält, also enthält die Summe (a+b+c+d +h+f+s) den Faktor d so oft, wie die Anzahl dieser Zahlen angibt. Die Anzahl dieser Zahlen ist aber gleich s. Also enthält die Summe (a+b+c+d+h+f+s) den Faktor d so viele Male, wie s Einheiten hat. Man multipliziere also d mit s, so ist das Resultat gleich (a+c+c+d+h+f+s), w. z. b. w. Ohne Zweifel gelangt man bei diesem Verfahren zu der letzten Zahl wie zu der ersten[13]), weil d die mittlere Zahl zwischen der ersten und der letzten und deshalb die Anzahl der Zahlen vor ihr gleich der Anzahl der auf sie folgenden ist.

28. Beginnt man die natürliche Zahlenreihe mit 1 und greift eine ungrade Anzahl von Zahlen heraus, multipliziert dann die Hälfte der letzten Zahl mit

der auf diese folgenden, so ist das Produkt gleich der Summe der Zahlen. Die Zahlen seien a, b, c. d, h, f, s, die auf s folgende Zahl sei k. Behauptung: $\frac{1}{2}$ s . k ist gleich der Summe (a+b+c+d+h+f+s). Beweis: Da a+s=2 d ist, weil a=1 ist, da ferner k=s+1 ist, ist k=2 d. Bewiesen ist schon, dass die Summe (a+b+c+d+h+f+s) gleich dem Produkt d . s ist. Es ist aber d . s=2 d . $\frac{1}{2}$ s, weil die Faktoren einer Proportion genügen, d. h. weil d : 2 d=$\frac{1}{2}$ s : s ist, also ist d . s=k . $\frac{1}{2}$ s, und daher ist das Produkt k . $\frac{1}{2}$ s gleich der Summe (a+b+c+d+h +f+s) w. z. b. w.

29. Die Summe der ungraden Zahlen einer natürlichen Reihe, die bei 1 beginnt, ist gleich dem Quadrat der in der Mitte zwischen 1 und der letzten ungraden Zahl stehenden Zahl. Die Zahlen seien a, b, c, d, h, f, s, k, t, die ungraden Zahlen aus dieser Reihe, a, c, h, s, t. Behauptung: Die Summe (a+c+h+s+t) ist gleich dem Quadrat der Zahl in der Mitte zwischen a und t. Beweis: Die mittlere Zahl kann entweder grade oder ungrade sein. Sei sie zuerst ungrade, wie es in diesem unsren Beispiele der Fall ist, wo wir also behaupten, dass (a+c+h+s+t) gleich dem Quadrat von h, der mittleren Zahl, sein soll. Beweis: a+t=2 h c+s=2 h, also enthält die Summe a+c+s+t den Faktor h so oft, wie die Anzahl der zusammengefassten Glieder ungibt. Bewiesen ist schon, dass kein ungrades Glied übrig bleiben kann, das nicht mit einem entsprechenden Gliede auf der anderen Seite verbunden werden könnte, weil die Anzahl der auf das mittlere, Glied folgenden Terme gleich der Zahl der ihm vorangehenden ist, und man die graden Zahlen mit den graden und die ungraden mit den ungraden verbinden kann, also ist die Zahl der ungraden Zahlen vor dem Mittelgliede der Zahl der ihm folgenden gleich. Die Zahl der ungraden Zahlen vor h ist aber gleich der Hälfte von h—1, also ist die Zahl der Posten a, c, s, t gleich h—1, also ist h in der Summe (a+c+s+t) (h—1)mal enthalten, in h selbst ist es einmal enthalten, also in der Summe (a+c+h+s+t) hmal, also ist die Summe (a+c+h+s+t)=h^2. Ist die mittlere Zahl eine grade, wie z. B, bei den Zahlen a, b, c, d, h, f, s, so wird behauptet, dass a+c+h+s=d^2 ist, da d die mittlere Zahl ist. Genau wie vorher beweist man, dass d in der Summe

$(a+c+h+s)$ so oft als Faktor enthalten ist, wie die Anzahl der Glieder angibt. Da nun d eine grade Zahl ist, ist die Anzahl der ungraden Zahlen vor d gleich der Hälfte von d. Es ist aber bereits bewiesen, dass die Anzahl der auf d folgenden ungraden Zahlen ebenso gross ist wie die der vorangehenden, also ist die Anzahl der ungraden auf d folgenden Zahlen gleich der Hälfte von d. Demnach ist die Anzahl der vorangehenden und folgenden ungraden Zahlen gleich d. Bewiesen ist, dass die Summe $(a+c+h+s)$ den Faktor d so oft enthält, wie die Zahl dieser Terme angibt, also d mal, also enthält die Summe $(a+c+h+s)$ den Faktor d so viele Male, wie d Einheiten hat, also ist die Summe $(a+c+h+s)=d^2$, w. z. b. w.

30. Addiert man die Summe der Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von eins bis zu einer gegebenen Zahl zu der Summe der Zahlen bis zu der auf die gegebene Zahl folgenden, so ist das Ergebnis gleich dem Quadrat der auf die gegebene folgenden Zahl. Man addiere die Summe der Zahlen a, b, c, d, h zu der Summe der Zahlen a, b, c, d, h, f, und es sei $a=1$, so wird behauptet, dass das Resultat gleich dem Quadrat von f ist. Beweis: Die auf f folgende Zahl bezeichnen wir mit s. Nun ist bewiesen, dass die Summe $(a+b+c+d+h)=\frac{1}{2}\,.\,h\,.\,f$ ist, und dass die Summe $(a+b+c+d+h+f)=\frac{1}{2}\,f\,.\,s$ ist. Aber $\frac{1}{2}\,f\,.\,s$ ist gleich $\frac{1}{2}\,s.\,f$, weil die Faktoren einer Proportion genügen. Also ergeben die Summen $(a+b+c+d+h)$ und $(a+b+c+d+h+f)$, addiert, $\frac{1}{2}\,h\,.\,f+\frac{1}{2}\,s\,.\,f$, das ist aber gleich dem Produkt aus $\frac{1}{2}\,(h+s)$ und f, und da $(h+s)=2\,f$ ist, ist ihre Hälfte gleich f, also ergeben die Summen $(a+b+c+d+h)$ und $(a+b+c+d+h+f)$, addiert, das Produkt $f\,.\,f$, das ist aber gleich f^2, w. z. b. w.

31. Die doppelte Summe der Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von 1 bis zu einer gegebenen Zahl ist gleich der gegebenen Zahl vermehrt um ihr Quadrat. Die Reihe der Zahlen sei a, b, c, d, h; a sei gleich 1. Behauptung: Das Doppelte der Summe $(a+b+c+d+h)$ ist gleich $h+h^2$. Beweis: Wenn man die Summen $(a+b+c+d+h)$ und $(a+b+c+d)$ addiert, so ist das Resultat gleich h^2, also ist die Summe der Aggregate $(a+b+c+d+h)$ und $(a+b+c+d+h)$ um

die hinzugefügte Zahl h grösser als h^2, w. z. b. w. Aus diesem Beweise ergibt sich, dass die Summe der Zahlen der natürlichen Reihe von 1 bis zu einer gegebenen Zahl gleich ist dem Quadrat der gegebenen Zahl vermehrt um deren Hälfte.

32. Addiert man Summen von natürlichen Zahlenreihen, die mit 1 beginnen und deren erste Glieder der natürlichen Zahlenreihe entsprechen, bis man zu einer bestimmten Zahl gelangt, so ist die Summe gleich der Summe der Quadrate der der gegebenen Zahl entsprechenden Zahlenart, d. h. das Ergebnis ist gleich der Summe der Quadrate der graden oder ungraden Zahlen bis zu der gegebenen Zahl, je nachdem diese grade oder ungrade ist. a sei 1 und werde zu den Summen (a+b), (a+b+c), (a+b+c+d), (a+b+c+d+h), (a+b+c+d+h+f) addiert, f sei eine grade Zahl. Behauptung: Das Resultat ist gleich der Summe der Quadrate von d, b, f, welches die graden Zahlen sind. Beweis: Die Summen der Aggregate (a+b+c+d+h+f), und (a+b+c+d+e) ist gleich f^2 und die Summe der Aggregate (a+b+c+d) und (a+b+c) ist gleich d^2, und die Summe der Aggregate (a+b) und a ist gleich b^2, also ist die Summe der Aggregate (a+b), (a+b+c), (a+b+c+d), (a+b+c+d+h), $(a+b+c+d+h+f)=b^2+d^2+f^2$. Sei nun die letzte Zahl ungrade, so wird behauptet, dass das Resultat gleich der Summe der Quadrate der ungraden Zahlen bis zu der gegebenen Zahl ist, 1 mitgerechnet. Beispiel: das letzte Aggregat sei (a+b+c+d+h+f+s). Behauptung: Das Resultat ist gleich der Summe der Quadrate der ungraden Zahlen, a, c, h, s. Beweis: Die Summe der Aggregate (a+b+c+d+h+f+s) und (a+b+c+d+h+f) ist gleich s^2, die Summe der Aggregate (a+b+c+d+h) und (a+b+c+d) ist gleich h^2, die Summe der Aggregate (a+b+c) und (a+b) ist gleich c^2, es bleibt a übrig, dass offenbar gleich seinem Quadrat ist, weil a doch 1 bedeutet, also ist das Resultat gleich $a^2+c^2+h^2+s^2$, w. z. b. w.

33. Addiert man Summen von Zahlenreihen, deren erste Glieder eine natürliche Zahlenreihe bilden und deren erste bei 1 anfängt und sich bis zu einer bestimmten Zahl erstreckt, so ist das Ergebnis gleich der Summe der Qua-

drate aller dieser Zahlen. Man addiere die Summen $(a+b+c+d+h)$, $(b+c+d+h)$, $(c+d+h)$, $(d+h)$ und h. Behauptung: Das Resultat ist gleich der Summe $(a^2+b^2+c^2+d^2+h^2)$. Beweis: Jede der Zahlen, a, b, c, d, h ist in diesen Zahlen so viele Male enthalten, wie sie Einheiten besitzt. Für jede Zahl gilt nämlich, dass die Anzahl der Zahlen bis zu ihr gleich der Anzahl ihrer Einheiten ist. Jede Zahl befindet sich aber in den Aggregaten, die mit den Zahlen beginnen, die in der natürlichen Reihe bis zu ihr vorkommen, und sie befindet sich nicht in den Aggregaten, die mit Zahlen beginnen, die in der natürlichen Reihe hinter ihr stehen, denn es ist unmöglich, dass die kleinere Zahl hinter der grösseren vorkommt, also ist jede der Zahlen a, b, c, d, h in diesen Aggregaten so viele Male enthalten, wie sie Einheiten besitzt, daher kommt sie als das Quadrat in dem Resultate vor, also müssen diese Aggregate, addiert, gleich der Summe der Quadrate $a^2+b^2+c^2+d^2+h^2$ sein, w. z. b. w.

34. Addiert man Summen von natürlichen Zahlenreihen, deren erste mit 1 beginnt und bei einer gegebenen Zahl endet, und deren erste Glieder der natürlichen Zahlenreihe entsprechen, und addiert dazu Summen von Zahlenreihen, die mit 1 beginnen, und deren letzte Glieder der natürlichen Zahlenreihe entsprechen, bis man zu der Zahl vor der gegebenen gelangt, so ist das Resultat gleich dem Produkt aus der letzten Zahl in die Summe der Zahlen der natürlichen Zahlenreihe von 1 bis zu ihr. Man addiert die Summe der Aggregate $(a+b+c+d+h)$, $(b+c+d+h)$, $(c+d+h)$, $(d+h)$, h zu der Summe der Aggregate a, $(a+b)$, $(a+b+c)$, $(a+b+c+d)$. Behauptung: Das Resultat ist gleich dem Produkt aus h und der Summe $(a+b+c+d+h)$. Beweis: Das erste Aggregat der Reihensummen, deren Anfänge der natürlicheu Zahlenreihe entsprechen, ist $(a+b+c+d+h)$, man addiere nun a zu $(b+c+d+h)$, $(a+b)$ zu $(c+d+h)$, $(a+b+c)$ zu $(d+h)$, $(a+b+c+d)$ zu h und erhält jedesmal $(a+b+c+d+h)$. Wenn man also jedes der Aggregate, deren Anfänge der natürlichen Zahlenreihe entsprechen, zu dem entsprechenden der Aggregate addiert, deren Enden der natürlichen Zahlenreihe entsprechen, so ist jedes Resultat gleich der

Summe (a+b+c+d+h). Nun ist aber die Anzahl der Aggregate, deren erste Glieder der natürlichen Zahlenreihe entsprechen, gleich der Anzahl der Einheiten des letzten, nämlich h, weil die Anzahl der Zahlen bis h gleich der Anzahl der Einheiten von h ist. Also ist in dem Resultat die Summe (a+b+c+d+h) hmal als Faktor enthalten. Man multipliziere also die Summe (a+b+c+d+h) mit h, und das Ergebnis wird gleich dem Resultate dieser Additionen sein, w. z. b. w.

35. Zieht man zwei auf einander folgende Zahlen von der Summe ihrer Quadrate ab, so ist die Differenz gleich dem Doppelten des Quadrats der kleineren Zahl. Die beiden auf einander folgenden Zahlen seien d und h, h sei die grössere. Behauptung: Zieht man von (d^2+h^2) die Summe (d+h) ab, so ist die Differenz gleich 2 d^2. Beweis: h^2 ist um das doppelte Produkt aus 1 und d, vermehrt um das Quadrat von 1, welches gleich 1 ist, grösser als d^2, also ist h^2 um (2 d+1) grösser als d^2, aber (2 d+1) ist gleich (d+h), weil h um 1 grösser ist als d, also ist h^2 gleich d^2 +(d+h), also ist d^2+h^2 gleich 2 d^2+(d+h), zieht man davon (d+h) ab, so ist der Rest gleich 2 d^2, w. z. b. w.

36. Addiert man die Summen von Reihensummen, die mit eins beginnen, und deren erste Glieder der natürlichen Zahlenreihe bis zu einer gegebenen Zahl entsprechen, und zieht davon die Summe der Zahlenreihe ab, so ist der Rest gleich der doppelten Summe der Quadrate der in der Reihe vorkommenden Zahlen von der Art der vorletzten Zahl, wenn diese grade ist, der graden, wenn sie ungrade ist, der ungraden Zahlen, eins mitgerechnet. Man addiere die Aggregate (a+b+c+d+h), (b+c+d+h), (c+d+h), (d+h), h und ziehe von dem Resultat die Summe (a+b+c+d+h) ab. Behauptung: Ist die vorletzte Zahl grade, so ist der Rest gleich der doppelten Summe der Quadrate der graden Zahlen bis zu derselben, und ist die vorletzte Zahl ungrade, so ist der Rest gleich der doppelten Summe der Quadrate der ungraden Zahlen bis zu derselben, 1 mitgerechnet. Sei sie zuerst grade, wie es in diesem unsren Beispiele ist. Dann wird behauptet, dass der Rest gleich der

doppelten Summe der Quadrate der graden Zahlen bis h, also von b und d, ist. Beweis: das Resultat ist gleich der Summe der Quadrate $(a^2+b^2+c^2+d^2+h^2)$, vermindert um $(a+b+c+d+h)$. Der Rest von (d^2+h^2), wenn man $(d+h)$ davon abzieht, ist aber gleich $2\,d^2$, und der Rest von b^2+c^2, wenn man $(b+c)$ davon abzieht, ist gleich $2\,b^2$, und das Quadrat von a ist ganz fortgefallen, als a abgezogen wurde, weil $a=1$ ist, also ist der Rest gleich dem Doppelten von (b^2+d^2). Sei nun die vorletzte Zahl ungrade, so wird behauptet, dass der Rest gleich der doppelten Summe der Quadrate der ungraden Zahlen bis zur letzten ist. Die Zahlen seien, a, b, c, d, h, f, die Zahl vor f, nämlich h, sei ungrade. Behauptung: Der Rest ist gleich der doppelten Summe der Quadrate der ungraden Zahlen bis f, nämlich a, c, h. Beweis: Das Resultat ist gleich der Summe der Quadrate $(a^2+b^2+c^2+d^2+h^2+f^2)$, vermindert um die Summe $(a+b+c+d+h+f)$, aber der Rest von (h^2+f^2), wenn man $(h+f)$ abzieht, ist gleich $2\,h^2$, der Rest von (c^2+d^2), wenn man $(c+d)$ abzieht, ist gleich $2\,c^2$, und der Rest von (a^2+b^2), wenn man $(a+b)$ davon abzieht, ist gleich $2\,a^2$, also ist der ganze Rest gleich dem Doppelten der Summe $(a^2+b^2+c^2)$, w. z. b. w.

37. M u l t i p l i z i e r t m a n e i n e b e l i e b i g e g e g e b e n e Z a h l m i t d e r S u m m e d e r n a t ü r l i c h e n Z a h l e n r e i h e v o n 1 b i s z u d e r a u f d i e g e g e b e n e f o l g e n d e n Z a h l, s o i s t d a s P r o d u k t g l e i c h d e r d r e i f a c h e n S u m m e n d e r Q u a d r a t e d e r g r a d e n o d e r u n g r a d e n Z a h l e n b i s z u d e r g e g e b e n e n, j e n a c h d e m d i e s e g r a d e o d e r u n g r a d e i s t. Man multipliziere h mit der Summe der Zahlen a, b, c, d, h, f. Behauptung: Das Produkt ist gleich der dreifachen Summe der Quadrate der Zahlen, die h entsprechen, das sind die Zahlen a, c, h. Beweis: Das Produkt $f\,(a+b+c+d+h+f)$ ist gleich der Summe $[a+(a+b)+(a+b+c)+(a+b+c+d)+(a+b+c+d+h)]+[(a+b+c+d+h+f)+(b+c+d+h+f)+(c+d+h+f)+(d+h+f)+(h+f)+f]$, aber die Summe $[a+(a+b)+(a+b+c)+(a+b+c+d)+(a+b+c+d+h)]$ ist gleich der Summe der Quadrate $(a^2+c^2+h^2)$, und wenn man von der Summe $[(a+b+c+d+h+f)+(b+c+d+h+f)+(c+d+h+f)+(d+h+f)+(h+f)+f]$ die Summe $(a+b+c+d+h+f)$ abzieht, so ist die Differenz gleich der doppelten Summe der Quadrate $(a^2+c^2+h^2)$,

also ist das Produkt f. $(a+b+c+d+h+f)$ gleich der dreifachen Summe $(a^2+c^2+h^2)$, vermehrt um die Summe $(a+b+c+d+h+f)$. Nun ist f. $(a+b+c+d+h+f)$ um $(a+b+c+d+h+f)$ grösser als h. $(a+b+c+d+h+f)$. Also ist h. $(a+b+c+d+h+f)$ gleich 3 $(a^2+c^2+h^2)$, w. z. b. w. Aus diesem Beweise geht hervor, dass, wenn man den dritten Teil einer gegebenen Zahl mit der Summe der Zahlen der natürlichen Reihe von 1 bis zu der auf die gegebene folgenden Zahl multipliziert, das Resultat gleich der Summe der Quadrate der graden bezw. ungraden Zahlen bis zu der gegebenen ist, je nachdem diese grade oder ungrade ist[14]). Denn wenn man diese gegebene Zahl mit dieser Summe multipliziert, so wäre das Resultat gleich der dreifachen Summe jener Quadrate, also ist das Produkt aus dem dritten Teil jener gegebenen Zahl in jene Summe gleich dem dritten Teil der dreifachen Summe der Quadrate der graden oder ungraden Zahlen, das ist aber gleich der Summe der Quadrate der Zahlen von der Art der gegebenen, die vor ihr verhanden sind, w. z. b. w.

38. Multipliziert man die Differenz zwischen einer gegebenen Zahl und dem dritten Teil der ihr vorangehenden mit der Summe der Zahlen der natürlichen Reihe von 1 bis zu der gegebenen Zahl, so ist das Resultat gleich der Summe der Quadrate aller Zahlen von 1 bis zu der gegebenen Zahl. Man multipliziert $(f-\frac{1}{3}h)$ mit der Summe $(a+b+c+d+h+f)$. Behauptung: Das Produkt ist gleich der Summe der Quadrate $(a^2+b^2+c^2+d^2+h^2+f^2)$[15]). Beweis: Das Produkt f. $(a+b+c+d+h+f)$ ist gleich der Summe $[(a+b+c+d+h+f)+(b+c+d+h+f)+(c+d+h+f)+(d+h+f)+(h+f)+f]$, vermehrt um die Summe $[a+(a+b)+(a+b+c)+(a+b+c+d)+(a+b+c+d+h)]$. Nun ist die Summe $[(a+b+c+d+h+f)+(b+c+d+h+f)+(c+d+h+f)+(d+h+f)+(h+f)+f]$ gleich der Summe $(a^2+b^2+c^2+d^2+h^2+f^2)$ und die Summe $[a+(a+b)+(a+b+c)+(a+b+c+d)+(a+b+c+d+h)]$ gleich der Summe $(a^2+c^2+h^2)$, also ist das Produkt f. $(a+b+c+d+h+f)$ gleich der Summe $(a^2+b^2+c^2+d^2+h^2+f^2)$, vermehrt um die Summe $(a^2+c^2+h^2)$. Aber das Produkt $\frac{1}{3}h \cdot (a+b+c+d+h+f)$ war gleich der Summe $(a^2+c^2+h^2)$, also bleibt als Rest $(f-\frac{1}{3}h) \cdot (a+b+c+d+h+f)$ gleich der Summe $(a^2+b^2+c^2+d^2+h^2+f^2)$, w. z. b. w.

39. Zieht man eine gegebene Zahl von ihrem Quadrat ab, so ist die Hälfte des Restes gleich der Summe der Zahlen der natürlichen Reihe von 1 bis zu der Zahl vor der gegebenen. f werde von f^2 abgezogen, die Zahl vor f sei h, die Hälfte der Differenz zwischen f^2 und f sei s. Behauptung: s ist gleich der Summe der Zahlen von 1 bis h. Beweis: Das Quadrat f^2 ist gleich der Summe $(a+b+c+d+h)$, vermehrt um $(a+b+c+d+h+f)$. Zieht man von der Summe f ab, so bleibt ein Rest, der gleich der Summe $(a+b+c+d+h)$, vermehrt um die Summe $(a+b+c+d+h)$, ist, also ist die Hälfte des Restes gleich der Summe $(a+b+c+d+h)$, w. z. b. w.

40. Addiert man eine gegebene Zahl zu der Hälfte der Differenz zwischen ihrem Quadrat und ihr selbst, so ist das Resultat gleich der Summe der Zahlen der natürlichen Reihe von 1 bis zu der gegebenen Zahl. f werde zu der halben Differenz zwischen f^2 und f addiert. Behauptung: Das Resultat ist gleich der Summe $(a+b+c+d+h+f)$. Beweis: f^2 ist gleich der Summe $(a+b+c+d+h+f)$, vermehrt um $(a+b+c+d+h)$. Subtrahiert man nun f und addiert f dann zu der halben Differenz, die gleich der Summe $(a+b+c+d+h)$ ist, so ist das Resultat $(a+b+c+d+h+f)$, das ist die natürliche Zahlenreihe von 1 bis f, w. z. b. w.

41. Das Quadrat der Summe der natürlichen Zahlenreihe von 1 bis zu einer gegebenen Zahl ist gleich der dritten Potenz der gegebenen Zahl, vermehrt um das Quadrat der Summe der Zahlen der natürlichen Reihe von 1 bis zu der Zahl vor der gegebenen. Die Summe der Reihe sei die Summe $(a+b+c+d+h)$. Behauptung: Das Quadrat der Summe $(a+b+c+d+h)$ ist gleich der dritten Potenz von h, vermehrt um die Summe $(a+b+c+d)$. Das ist der Fall, weil h^3 so oft den Faktor h enthält, wie h^2 Einheiten hat, aber h^2 ist gleich der Summe der Summen $(a+b+c+d)$ und $(a+b+c+d+h)$. Multipliziert man also h mit der Summe $[(a+b+c+d+h)+(a+b+c+d)]$, so erhält man h^3. Aber das Produkt aus h und der Summe $[(a+b+c+d+h)+(a+b+c+d)]$ ist gleich dem Produkt $h \cdot h$,

welches gleich h^2 ist, vermehrt um das Produkt aus h in die Summe [(a+b+c+d)+(a+b+c+d)], welches gleich 2 h (a+b+c+d) ist, also ist h^3 gleich $h^2+2 . h$ (a+b+c+d). Nun ist aber das Quadrat $(a+b+c+d+h)^2$ gleich h^2, vermehrt um das doppelte Produkt aus h und der Summe (a+b+c+d) und das Quadrat $(a+b+c+d)^2$, also ist h^3 vermehrt um das Quadrat $(a+b+c+d)^2$ gleich dem Quadrat $(a+b+c+d+h)^2$, w. z. b. w. Allerdings hat 1 keine Zahl vor sich, aber seine dritte Potenz ist dem Quadrat der Summe der natürlichen Reihe bis zu ihm gleich, denn es stellt selbst die Summe der Reihe bis zu ihm und deren Quadrat dar, und es selbst ist seine dritte Potenz, das ist sehr klar.

42. Das Quadrat der natürlichen Zahlenreihe von 1 bis zu einer gegebenen Zahl ist gleich der Summe der dritten Protenzen der Zahlen von 1 bis zu der gegebenen. Die Summe sei (a+b+c+d+h). Behauptung: Das Quadrat $(a+b+c+d+h)^2$ ist gleich der Summe der dritten Potanzen von a, b, c, d, h. Beweis: Das Quadrat $(a+b+c+d+h)^2$ ist gleich $h^3+(a+b+c+d)^2$, aber das Quadrat $(a+b+c+d)^2$ ist gleich $d^3+(a+b+c)^2$, und dieses Quadrat ist gleich $c^3+(a+b)^2$. Und siehe, $(a+b)^2$ ist gleich b^3+a^2, a^2 ist aber selbst gleich a^3, also ist das Quadrat $(a+b+c+d+h)^2$ gleich der Summe der dritten Potenzen der Zahlen, a, b, c, d, h, w. z. b. w.[16])

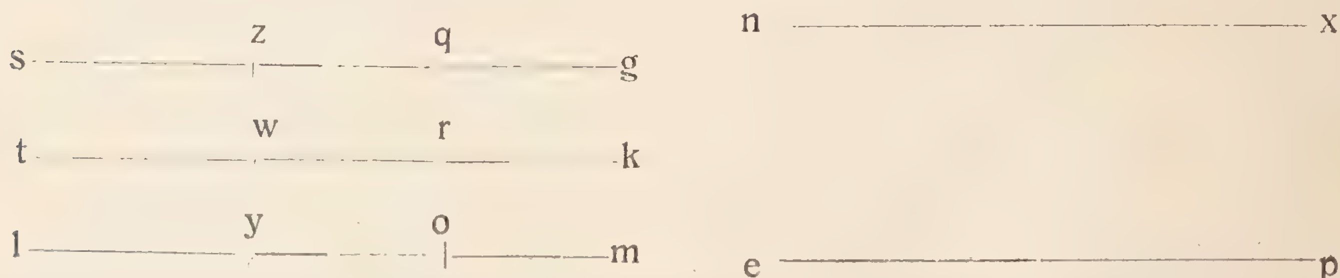
43. Ist eine gegebene Zahl gleich der Summe einer gegebenen natürlichen Zahlenfolge, die mit 1 beginnt, und ist die gegebene Zahl die mittlere einer Zahlenreihe, d. h. das arithmetische Mittel zwischen 1 und der letzten, so ist die Summe der dritten Potenzen der gegebenen Reihe gleich der Summe der ungraden Zahlen der zweiten Zahlenreihe, 1 mitgerechnet. Die Zahl f sei gleich der Summe (a+b+c), f sei die mittlere Zahl der Reihe a, b, c, d, h, f, s, g, t, i, k, die bei 1 beginnt. Behauptung: Die Summe der ungraden Zahlen von a, b, c, d, h, f, s, g, t, i, k ist gleich der Summe $a^3+b^3+c^3$. Beweis: $a^3+b^3+c^3$ ist gleich f^2 und die Summe der ungraden Zahlen aus der Folge a, b, c, d, h, f, s, g, t, i, k ist auch gleich

f^2, weil f die mittlere Zahl ist, also ist die Summe $(a^3+b^3+c^3)$ gleich der Summe der ungraden Zahlen der Folge a, b, c, d, h, f, s, g, t, k, l, w. z. b. w.

44. Addiert man zu dem Produkt zweier Zahlen eine gegebene dieser Zahlen, so enthält das Resultat die auf die andre Zahl folgende so oft als Faktor, wie die Einheiten der gegebenen besagen. a werde mit b multipliziert, zum Resultat werde a addiert, das jetzige Resultat sei c, die auf b folgende Zahl sei d. Behauptung: d ist in c so oft als Faktor enthalten, wie die Einheiten von a besagen. Beweis: Das Produkt a . b enthält a so oft als Faktor, wie die Einheiten von b angeben. Addiert man zu ihm a, so hat das Resultat a einmal mehr als Faktor, als die Einheiten von b angeben, das ist aber dmal. Also enthält das Resultat a dmal als Faktor und daher d amal als Faktor, w. z. b. w.

45. Sind 3 verschiedene Zahlen gegeben, und man addiert zu dem Produkt der grössten in die Differenz zwischen der mittleren und der kleinsten das Produkt aus der kleinsten in die Differenz zwischen der grössten und der mittleren, so enthält das Ergebnis die mittlere Zahl so oft als Faktor, wie die Einheiten der Differenz zwischen der grössten und kleinsten angeben. Die drei Zahlen a, b, c seien verschieden. b sei um d grösser als a, c um h grösser als b. Behauptung: Die Summe der Produkte c . d und a . h enthält h so oft als Faktor, wie die Einheiten der Summe (+hd), welche die Differenz zwischen c und a ist, angeben. Beweis: Das Produkt c . d enthält d cmal als Faktor. Wir teilen nun das Produkt c . d in Teile, die c gleich sind. Diese seine Teile, die gleich c sind, seien sg, tk, lm. Siehe, die Anzahl dieser Teile ist gleich d. Ebenso teile man das Produkt a . h in Teile, die a gleich sind, und diese seine a gleichen Teile seien die Zahlen nx, ep. Siehe, die Anzahl dieser Teile ist gleich der der Einheiten von h, und deshalb ist die Anzahl der Teile sg, tk, lm, nx, ep gleich der Zahl der Einheiten von (d+h), der Differenz zwischen c und a. Nun

trennen wir von $\overline{sg}$ das Stück $\overline{sz}$, das gleich b ist, ab, es bleibt $\overline{zg}$ gleich h. Ebenso seien $\overline{tw}$, $\overline{ly}$ gleich b, und es bleibt jeder der Teile $\overline{wk}$, $\overline{ym}$ gleich h. Dann teilen wir $\overline{zg}$ in Teile, die der Einheit gleich sind, die der Einheit gleichen Teile seien, $\overline{zq}$, $\overline{qg}$, ihre Anzahl ist gleich der der Einheiten von h. Ebenso teilen wir $\overline{wk}$ in Teile, die gleich der Einheit sind, diese seine Teile seien $\overline{wr}$, $\overline{rk}$, die Teile von $\overline{ym}$, die der Einheit gleich sind, seien $\overline{yo}$, $\overline{om}$. Nun war die Anzahl der Zahlen $\overline{sg}$, $\overline{tk}$, $\overline{bm}$ gleich der der Einheiten von d, also ist auch die Anzahl der Teile $\overline{zg}$, $\overline{wr}$, $\overline{yo}$ gleich der der Einheiten von d. Addiert man nun $\overline{zq}$, $\overline{wr}$, $\overline{yo}$ zu $\overline{nx}$, so ergibt sich b, weil die Zahl der Einheiten $\overline{zq}$, $\overline{wr}$, $\overline{yo}$, gleich den in d enthaltenen ist, und also die Einheiten $\overline{zq}$, $\overline{wr}$, $\overline{yo}$, addiert, d ergeben, und $\overline{nx}$ gleich a ist, daher ergibt $\overline{nx}$, zu den Einheiten $\overline{zq}$, $\overline{wr}$, $\overline{yo}$ addiert, (a+d), (a+d) ist aber gleich b, also ist $\overline{nx}$, vermehrt um die Einheiten $\overline{zq}$, $\overline{wr}$, $\overline{yo}$, gleich b. Ebenso beweist man, dass $\overline{ep}$, zu den Einheiten $\overline{qg}$, $\overline{rk}$, $\overline{om}$ addiert, gleich b ist. Es war aber bereits gezeigt, dass die Anzahl der Zahlen $\overline{nx}$, $\overline{ep}$ gleich der der Einheiten $\overline{zq}$, $\overline{qg}$ ist, weil beide gleich h sind. Also ist die Gesamtzahl der Zahlen $\overline{nx}$, $\overline{ep}$ gleich den der Einheit gleichen $\overline{zq}$, $\overline{qg}$ mit



den zugehörigen Teilen. Also ist schon bewiesen, dass das Produkt c . d, vermehrt um das Produkt a . h den Faktor b so viele Male enthält, wie die Anzahl der Teile $\overline{sg}$, $\overline{tk}$, $\overline{lm}$, $\overline{nx}$, $\overline{ep}$ angibt, das ist aber gleich der Summe (c+d), welche die Differenz zwischen c und a ist [17]), w. z. b. w.

46. Wenn drei verschiedene Zahlen gegeben sind, deren kleinste zwei ist, und man addiert zu dem doppelten Produkt der um 1 verminderten grössten Zahl in die Differenz zwischen der mittleren und der kleinsten die

grösste Zahl und die Differenz zwischen der mittleren und der kleinsten und die Differenz zwischen der grössten und der mittleren, so ist diese ganze Summe gleich dem doppelten Produkt aus der mittleren in die um 1 verminderte grösste Zahl. Die verschiedenen Zahlen seien drei, und zwar die Zahlen 2, a, b; b sei die grösste, a sei um c grösser als 2, a—1 sei s, b—1 sei d, b sei um h grösser als a. Behauptung: Das doppelte Produkt c . d, vermehrt um die Zahlen b, c und h ist gleich dem doppelten Produkt s . d. Beweis: Das Produkt c . d enthält d so viele Male als Faktor, wie e Einheiten hat, das Produkt s . d enthält d so viele Male als Faktor, wie s die Einheit enthält, s ist um 1 grösser als c, weil a um 2 grösser ist als c, also ist die Differenz zwischen den Produkten s . d und c . d gleich dem Produkt aus (s—d) in d, also ist die Differenz der Produkte s . d und c . d gleich d, und deshalb ist das doppelte Produkt s . d um 2 . d grösser als das doppelte Produkt c . d. Nun behaupten wir, dass die Summe (b+c+h) gleich 2d ist. Beweis: b ist um 1 grösser als d. Nun ist der Unterschied zwischen b und a gleich h, also ergeben die Zahlen a und h, addiert, b, und deshalb ist die Summe der Zahlen, b, a, h gleich 2 b. 2 b ist aber um 2 grösser als 2 d, also ist die Summe (b+a+h) gleich 2 d+2, aber c ist um 2 weniger als a, also ist die Summe (b+c+h) gleich 2 d. Nun war das doppelte Produkt s . d um 2 d grösser als das doppelte Produkt c . d, also ist das doppelte Produkt c . d, vermehrt um die Zahlen b, c, h gleich dem doppelten Produkt s . d, w. z. b. w.

47. Wenn zwei verschiedene Zahlen gegeben sind, so ist das Produkt aus der kleineren in die grössere, vermehrt um die Differenz zwischen der grösseren und der kleineren, gleich dem Produkt aus der um 1 verminderten kleineren in die um 1 verminderte grössere, wenn man dazu die grössere Zahl und die vorangehende addiert. Die 2 Zahlen seien a und b, c sei die Zahl vor a, d die vor b, Die Differenz zwischen b und a sei h. Behauptung: Das Produkt a . b, vermehrt um h, ist gleich der Zahlensumme (d+b), vermehrt um das Produkt c . d. Beweis: Das Produkt

c . d, vermehrt um d, enthält den Faktor a so viele Male, wie d Einheiten hat, da a um 1 mehr ist als c, also ist das Produkt c . d, vermehrt um d, gleich dem Produkt a . d. Und da nun b um h grösser ist als a, ist b gleich (a+h). Also ist a . d, vermehrt um a, gleich dem Produkt a . b, demnach ist das Produkt a . d, vermehrt um die Summe (a+h) gleich dem Produkt a . b, vermehrt um h, also ist das Produkt c . d, vermehrt um die Summe (d+b) gleich dem Produkt a . b, vermehrt um h, w. z. b. w.

48. Wenn drei verschiedene Zahlen gegeben sind in die kleinste 2 ist, so ist das doppelte Produkt aus der um 1 verminderten grössten Zahl in die Differenz zwischen der mittleren und der kleinsten, vermehrt um die grösste Zahl, die Differenz zwischen der mittleren und der kleinsten und die Differenz zwischen der grössten und der mittleren, gleich dem Produkt aus der um 1 verminderten mittleren in die grösste, vermehrt um das Produkt aus der um 1 verminderten grössten in die Differenz zwischen der mittleren und der kleinsten und um die Differenz zwischen der grössten und der mittleren. Die verschiedenen Zahlen seien die Zahlen 2, a, b. b sei die grösste, a sei um c grösser als 2, d sei die Zahl vor a, h sei die Zahl vor b, s sei die Differenz zwischen b und a. Behauptung: Das doppelte Produkt a . c, vermehrt um die Zahlen c, b, s ist gleich dem Produkte d . b, vermehrt um das Produkt c . h und s. Beweis: Wir lassen das Produkt c . h und die Zahl s, die auf beiden Seiten vorkommen, weg und behaupten, dass das Produkt d . b gleich der Summe des Produkts c . h und der Zahlen c und b ist. Das ist der Fall, denn das Produkt c . h, vermehrt um c, ist gleich dem Produkt c . b, weil b um 1 grösser ist als h, ebenso ist das Produkt b . c, vermehrt um b, gleich dem Produkt d . b. Also ist das Produkt c . h, vermehrt um die Zahlen c und b, gleich dem Produkt d . b, also ist das doppelte Produkt c . h, vermehrt um die Zahlen b, c und s, gleich der Summe der Produkte d . b und c . h und der Zahl s, w. z. b. w.

49. Wenn drei verschiedene Zahlen gegeben sind, deren kleinste um eine gegebene Zahl grösser ist als 2, und man bildet das doppelte Produkt aus der um 1 verminderten grössten Zahl in die Differenz der mittleren und der kleinsten, addiert dazu die Produkte aus der grössten und der um 1 verminderten grössten in die gegebene Zahl, addiert dazu die grösste Zahl, die Differenz der mittleren und der kleinsten und die Differenz der grössten und der mittleren, so ist das Resultat gleich dem doppelten Produkt aus der um 1 verminderten mittleren in die um 1 verminderte grösste. Die verschiedenen Zahlen seien c, a, b. c sei die kleinste, b die grösste, die Differenz zwischen c und 2 sei d, die Differenz zwischen a und c sei h, s sei die Zahl vor a, g die vor b, die Differenz zwischen b und a sei t, k sei gleich der Summe h+d. Klar ist es, dass k um 2 kleiner als a ist, weil c+h gleich a und d um 2 kleiner als c ist, deshalb ist s auch die auf k folgende Zahl, weil s um nur 1 kleiner ist als a. Behauptung: Bildet man das doppelte Produkt g . h, addiert dazu das Produkt d . b und das Produkt d . g und addiert zu dem Ganzen die Zahlen b, h, t, so ist das Resultat gleich dem doppelten Produkt s . g. Beweis: Das Produkt g . h, vermehrt um h, ist gleich h . b, addiert man zu dem Produkt h . b das Produkt d . b, so ist das Resultat gleich dem Produkt aus der Summe (h+d) und b, das ist aber gleich k . b. Addiert man zu diesem Resultat b, so ist das Ergebnis s . b. Aber die Summe der Produkte g . h und g . d ist gleich dem Produkt aus g in die Summe (d+h), gleich g . k, also ist das doppelte Produkt g . h, vermehrt um die Produkte d . b und g . d und um die Zahlen b, h, t gleich dem Produkt s . b, vermehrt um das Produkt k . g und die Zahl t. [18]) Wenn man die Voraussetzungen des vorigen Satzes anwendet, so ist a die mittlere Zahl, k die Differenz zwischen ihr und der kleinsten, die gleich 2 ist. Dann ist aber die Summe der Produkte s . b und k . g, sowie der Zahl t gleich dem doppelten Produkte k . g, vermehrt um die Summe (b+k+t), also ist das doppelte Produkt g . h, vermehrt um die Produkte d . b und g . d und um die

Zahlensumme (b+k+t), gleich dem doppelten Produkte k . g, vermehrt um die Zahlensumme (b+k+t). Aber das doppelte Produkt k . g vermehrt um die Summe (b+k+t) ist gleich dem doppelten Produkt s . g weil die Summe (b+k+t) gleich 2 g ist und s die auf k folgende Zahl bedeutet; wenn man also zu dem Produkt k . g die Zahl g addiert, so erhält man das Produkt s . g, und deshalb ist das doppelte Produkt k . g, vermehrt um die Zahlensumme (b+k+t), die gleich 2 g ist, gleich dem doppelten Produkt s . g, also ist die Summe aus dem doppelten Produkt g . h, den Produkten d . b und g . d, sowie den Zahlen b, h, t gleich dem doppelten Produkt s . g, w. z. b. w.

50. Wenn drei verschiedene Zahlen gegeben sind, und die Differenz zwischen der kleinsten Zahl und 2 ist eine gegebene Zahl, und man bildet das doppelte Produkt der um 1 verminderten grössten in die Differenz zwischen der mittleren und der kleinsten, vermehrt es so oft, wie die gegebene Zahl angibt, um das Produkt der mittleren Zahl in die grösste, und addiert dazu das Produkt der Differenz zwischen der grössten und der mittleren in die um 1 verminderte kleinste Zahl, die grösste Zahl und die Differenz der mittleren und kleinsten, so enthält das Ergebnis aller dieser Additionen das Produkt aus der um 1 verminderten mittleren in die um 1 verminderte grösste Zahl so oft als Faktor, wie die Einheiten der kleinsten angeben.

Die verschiedenen Zahlen seien c, a, b; c sei die kleinste, die Differenz zwischen c und 2 sei d, a sei um h grösser als c, s sei die Zahl vor a, g die Zahl vor b, b sei um t grösser als a, k sei die Zahl vor c. Behauptung: 2 . g . h+d(a . b)+t . k+b+h enthält s . g, so oft als Faktor, wie c angibt. Beweis: Da das Produkt a . b, vermehrt um t, gleich dem Produkt s . g, vermehrt um die Summe (b+g), ist, so ist d (ab), vermehrt um d . t, gleich d . (sg), vermehrt um d . b und d . g. Also ist d . (ab)+d . t gleich d . (sg)+d . b+d . g.

Aber t.k ist um t grösser als t.d, weil k um 1 grösser ist als d, also ist d(ab)+t.k gleich d.(sg)+d.k+d.g+t. Addieren wir nun d.k+d.g+t zu 2g.h+b+h, das uns geblieben war, so ist das Ergebnis 2gh+dk+dg+b+h+t. Addiert man das aber, so ist es nach dem Obigen gleich 2sg. Also enthält 2gh+d(ab)+tb+b+h das Produkt s.g (d+2)mal, aber (d+2) ist gleich c, also enthält 2gh+d(ab)+tk+b+h das Produkt s.g cmal als Faktor, w. z. b. w. Damit ist bewiesen, dass das Ergebnis dieser Addition, c als Faktor so oft enthält, wie die Einheiten des Produkts s.g angeben.

51. W e n n d r e i v e r s c h i e d e n e Z a h l e n g e g e b e n s i n d, u n d m a n a d d i e r t z u d e m P r o d u k t a u s d e r u m 1 v e r m i n d e r t e n g r ö s s t e n u n d d e r D i f f e r e n z z w i s c h e n d e r m i t t l e r e n u n d d e r k l e i n s t e n d i e g r ö s s t e Z a h l u n d d i e D i f f e r e n z z w i s c h e n d e r m i t t l e r e n u n d d e r k l e i n s t e n, s o e n t h ä l t d a s R e s u l t a t d i e g r ö s s t e Z a h l s o o f t a l s F a k t o r, w i e d i e E i n h e i t e n d e r Z a h l a n g e b e n, d i e a u f d i e D i f f e r e n z z w i s c h e n d e r m i t t l e r e n u n d k l e i n s t e n f o l g t. Die drei verschiedenen Zahlen seien a, b, c; a sei die kleinste, b die mittlere, c die grösste. Die Differenz zwischen b und a sei d, die Zahl vor c sei h, die Zahl nach d sei s. Behauptung: Das Produkt d.h, vermehrt um die Summe (c+d), enthält c so oft als Faktor, wie die Einheiten von s angeben. Beweis: Das Produkt d.h, vermehrt um d, ist gleich dem Produkt d.c; addiert man zu dem Produkt d.c die Zahl c, so ist das Resultat gleich s.c, also ist die Summe des Produktes d.h und der Zahlensumme (c+d) gleich dem Produkt s.c, also enthält die Summe aus c.h und (c+d) den Faktor c so viele Male, wie s Einheiten hat, w. z. b. w.

52. W e n n d r e i v e r s c h i e d e n e Z a h l e n g e g e b e n s i n d, u n d m a n a d d i e r t z u d e m P r o d u k t a u s d e r u m 1 v e r m i n d e r t e n g r ö s s t e n u n d d e r D i f f e r e n z z w i s c h e n d e r m i t t l e r e n u n d k l e i n s t e n d a s P r o d u k t a u s d e r u m 1 v e r m i n d e r t e n k l e i n s t e n u n d d e r D i f f e r e n z z w i s c h e n d e r g r ö s s t e n u n d m i t t l e r e n, f e r n e r d i e g r ö s s t e Z a h l u n d d i e D i f f e r e n z z w i s c h e n d e r m i t t l e r e n u n d k l e i n s t e n,

so enthält das Resultat dieser ganzen Addition die mittlere Zahl so oft als Faktor, wie die Einheiten der Zahl angeben, die auf die Differenz zwischen der grössten und kleinsten folgt. Die verschiedenen Zahlen seien a, b, c; a sei die kleinste, c die grösste. Die Differenz zwischen b und a sei d, die zwischen c und b sei t. Die Zahl vor a sei h, die vor c sei l, die Differenz zwischen c und a sei s, die auf s folgende Zahl sei g. Behauptung: Die Summe der Produkte d . l und t . h, vermehrt um die Zahlensumme (c+d), enthält b so oft als Faktor, wie die Einheiten von g angeben. Beweis: Das Produkt d . l, vermehrt um d, ist gleich dem Produkt d . c, und das Produkt t . h, vermehrt um c, ist gleich der Summe des Produktes t . a und der Zahl b, weil c gleich der Summe (b+t) ist. Da nun t, zu dem Produkt t . h addiert, das Produkt t . a ergibt, erhält man durch Addition von (b+t), welches gleich c ist, zu dem Produkt t . h das Resultat t . a+b. Also ist das Produkt d . l, vermehrt um das Produkt t . h und die Zahlensumme (c+d), gleich der Summe der Produkte c . d und t . a und der Zahl b. Aber die Summe der Produkte d . c und t . a ist gleich dem Produkte s . b, also ist die Summe der Produkte d . l und t . h und der Zahlensumme (c+d) gleich dem Produkte s . b, vermehrt um b. Aber das um b vermehrte Produkt s . b ist gleich dem Produkt g . b, also enthält die Summe der Produkte s . l und t . h und der Zahlensumme (c+d) den Faktor b so oft, wie die Einheiten von g angeben, w. z. b. w.

53. Aufgabe: 3 Zahlen zu finden der Art, dass die erste, vermehrt um einen gegebenen Teil der Summe der beiden andern, gleich der zweiten, vermehrt um einen andern, gleichfalls gegebenen, kleineren Teil der Summe der beiden übrigen und gleich der dritten, vermehrt um einen gegebenen dritten Teil der Summe der beiden übrigen ist, der kleiner sein soll als der zweite Teil. Die Zahlen, durch welche diese Teile benannt sind, seien a, b, c, der grösste Bruch sei der durch a benannte, der kleinste der durch c benannte. Also ist die kleinste Zahl die Zahl a, die grösste die Zahl c. Die Differenz zwischen b und a sei d, die zwischen c und b sei s, die Zahl vor c sei g, die vor b sei l. Siehe, a muss entweder

2 oder grösser als 2 sein. Sei es zunächst 2 [19]). Wir addieren nun die letzte Zahl, c, zu d, der Differenz zwischen b und a, das Resultat (c+d) setzen wir gleich h. Das ist die erste der Zahlen. Ferner addieren wir h und das doppelte Produkt der um 1 verminderten grössten Zahl in die Differenz der mittleren und kleinsten, das ist also das doppelte Produkt d . g. Das Resultat bezeichnen wir mit t, das ist die zweite Zahl. Ferner addieren wir t und das doppelte Produkt der um 1 verminderten kleinsten Zahl in die Differenz der grössten und der mittleren, d. i. also das doppelte Produkt s. (a—1), das Resultat bezeichnen wir mit k, das ist die dritte Zahl. Behauptung: h, t, k sind die gesuchten Zahlen. Beweis: t ist gleich h+2 . d.g, und k ist gleich h+2 . d.g+2 s (a—1), welches letztere gleich 2 s ist, weil a—1 gleich 1 ist. Also ist die Hälfte von t+k gleich h+2 d.g+s, aber h ist gleich (c+d), also ist die Hälfte von t+k gleich 2 . d.g+(c+d+s), aber 2 . d.g+(c+d+s) ist ist gleich 2 . l . g, also ist die Hälfte der Zahlensumme (t+k) gleich 2 . l . g. Multipliziert man also 2 . l . g mit 2, so ist das Resultat gleich (t+k), also enthält (t+k) den Faktor a, der ja gleich 2 ist, so oft wie das Produkt 2 . l . g angibt. Wir bezeichnen nun das doppelte Produkt l . g mit m, so ist m gleich $\frac{1}{a}$ der Zahlensumme (t+k).

Ferner ist (h+k) gleich 2 h+2 . d.g+ 2s, also ist die Hälfte von (h+k) gleich h+d.g+s, aber h ist gleich (b+c), also ist die Hälfte von (h+k) gleich d . g+c+d+s, (c+d+s) ist nun seinerseits gleich a . g, weil a gleich 2 ist und c+d+s gleich 2 g ist, also ist die Hälfte von (h+k) gleich d . g+a . g, und das ist gleich b . g, weil b gleich (d+a) ist, demnach ist die Hälfte von (h+k) gleich b . g, und die Hälfte von (h+k) enthält so den Faktor b so viele Male, wie die Einheit in g enthalten ist [20]), also ist b in (h+k) so oft enthalten wie die Einheit in 2 g. Wir bezeichnen 2 g mit n, n ist demnach der bte Teil der Summe (h+k).

(h+t) ist nun gleich 2 h+2 d . g, also ist die Hälfte von (h+t) gleich h+d . g, aber h ist gleich (c+d), also ist die Hälfte von (h+t) gleich d . g+(c+d); d . g+(c+d) enthält jedoch c so oft als Faktor, wie die Einheit in der auf d folgenden Zahl

l enthalten ist[21]), also enthält (h+t) den Faktor c so oft wie 2 l die Einheit enthält. 2 l sei gleich x, dann ist x der cte Teil der Summe (h+t).

Wir behaupten nun, dass (h+m) gleich (t+n) und gleich (k+x) ist. Das ist der Fall, denn (h+m) ist gleich 2 l . g+h, und (t+n) ist nach dem Obigen gleich h+2 d . g+2 g. Addieren wir nun g und d . g, so ergibt das l . g, daher ist 2 d . g+2 g gleich 2 l . g. Also ist (t+n) gleich (h+m). Und ebenso ist (k+x) nach dem Obigen gleich h+2 d . g+2 s+2 l. Da nun (s+b) gleich c und l gleich (b—1) ist, ist die Summe (s+l) gleich (c—1), also ist (s+l) gleich g. Demnach ist (k+x) gleich h+2 d . g+2(s+l), welches letztere gleich 2 g ist. Aber 2 d . g+2 g ist gleich 2 . d . l, also ist (k+x) gleich h+2 l . g, und folglich ist (k+x) auch gleich (h+m). So haben wir also 3 Zahlen, h, t, k, gefunden, deren erste, nämlich h, vermehrt um den aten Teil der Summe der andern, gleich t, vermehrt um den bten Teil der Summe der andern, und auch gleich k, vermehrt um den cten Teil der Summe der andern ist, das war, was wir suchten.

[22]) Es sei nun a grösser als 2, und zwar sei es um d grösser als 2, die Differenz zwischen b und a sei h, die zwischen c und b sei s, die Zahl vor a sei g, die vor b sei t, die vor c sei l. Die Aufgabe bleibe die obengenannte. Siehe, wir nehmen so viele dem Produkt der mittleren der Zahlen in die grösste gleiche Teile, wie die Differenz zwischen der kleinsten und 2 angibt, und addieren zu dem Ergebnis die grösste der Zahlen und die Differenz zwischen der mittleren und der kleinsten, d. w. s., wir nehmen so viele gleiche Teile b . c, wie d angibt, und addieren dazu (c+h). Das Resultat sei m, so ist m die erste Zahl.

Dann addieren wir zu m das doppelte Produkt aus der um 1 verminderten grössten Zahl in die Differenz zwischen der mittleren und der kleinsten, d. w. s. wir addieren m zu 2 . h . l und setzen das Ergebnis gleich n, so ist n die zweite Zahl. Ferner addieren wir n zu dem doppelten Produkt der um 1 verminderten kleinsten Zahl in die Differenz zwischen der grössten und der mittleren, d. w. s., wir addieren n zu 2 s . g und setzen das Resultat gleich x, so ist x die dritte Zahl.

Behauptung: m, n, x sind die gesuchten Zahlen. Beweis: n ist gleich m+2hl und x ist gleich m+2hl+2sg, also ist die Hälfte von (n+x) gleich m+2hl+sg. Aber m war gleich dem Produkt b . c, multipliziert mit d und vermehrt um die Summe (c+h), also ist die Hälfte von (n+x) gleich d . (b . c)+2hl+sg +(c+h). [23]) Nun enthält d . (b . c)+2hl+sg+(h+c) den Faktor a so oft, wie das Produkt t . l angibt, also ist a in (n+x) so oft als Faktor enthalten, wie das doppelte Produkt t . l angibt. Bezeichnen wir nun 2 . t . l mit y, so ist y der ate Teil von (n+x).

Es ist aber auch (m+x) gleich 2m+2hl+2sg, daher ist die Hälfte von (m+x) gleich m+h . l+s . g, aber m ist gleich so viel gleichen Teilen (b . c), wie d angibt, vermehrt um (c+h), also ist die Hälfte von (m+x) gleich h . l+s . g+(c+h)+d . (b . c). Nun enthält hl+sg+(c+h) den Faktor b so viele Male, wie die auf die Differenz von c und a folgende Zahl, d. i. die auf (h+s) folgende Zahl [22]), besagt. Wir nennen diese q. Es enthalten aber d gleiche Teile (b . c) den Faktor b so oft, wie das Produkt d . c angibt, weil d gleiche Teile des Produkts (b . c) eine aus d, b, c zusammengesetzte Zahl sind, also enthält die Hälfte von (m+x) den Faktor b so oft, wie d . c+q besagt, also sieht man, dass b in (m+x) so oft enthalten ist, wie das um 2q vermehrte doppelte Produkt d . c Einheiten hat. Setzen wir jetzt 2dc+2q gleich p, so ist p der bte Teil von (m+x).

Ferner ist (m+n) gleich 2m+2hl, also ist die Hälfte von (m+n) gleich m+h . l, aber m ist gleich d gleichen Teilen (b . c), vermehrt um (c+h), also ist die Hälfte von (m+n) gleich h . l+(c+h)+d(bc). Nun erhält h . l+(c+h) den Faktor c [21]) so oft, wie die auf h folgende Zahl angibt, wir setzen diese gleich r. In d gleichen Teilen (bc) ist c so oft enthalten, wie das Produkt d . b besagt. Also ist c in der Hälfte von (m+n) so viele Male enthalten, wie das um r vermehrte Produkt d . b Einheiten hat, also ist c in (m+n) als Faktor (2db+2r) mal enthalten. Wir bezeichnen 2db+2r mit z, dann ist z der cte Teil von (m+n).

Wir behaupten nun, dass (m+y), (n+p), (x+z) einander gleich sind.

Beweis: (m+y) ist gleich m+2tl und (n+p) ist gleich m+2hl+2dc+2q. Lassen wir in den beiden Ausdrücken das ge-

meinschaftliche m fort, so behaupten wir, dass 2tl gleich 2hl+2dc+2q ist. Das ist der Fall, denn die Differenz zwischen t und h ist g, weil (a+h) gleich b und demnach (g+h) gleich t ist. Also ist die Differenz von tl und hl gleich gl. Ferner behaupten wir, dass q+d gleich l ist. Da nämlich q gleich (h+s+1) und (h+s+a) gleich c ist, muss q+a gleich c+1 sein, also ist q+g gleich c, und daher ist q+g um 1 grösser als l, also ist q+d gleich l. Nachdem dieses bewiesen, ist auch bewiesen, dass 2tl gleich 2hl+2dc+2q ist, denn dl+d ist gleich d . c, also ist 2.dc gleich 2dl+2d. Also ist 2dc+2q gleich 2dl+2(d+q), welcher letztere Posten gleich 2l ist. Aber 2dl, vermehrt um 2l, ist gleich 2gl, also ist 2dc+2q gleich 2gl. Addiert man hierzu 2hl, so ist das Ergebnis 2hl+2gl, aber 2hl+2gl, ist gleich 2tl, also ist (m+y) gleich (n+p). Ebenso ist (x+z) gleich m+2hl+2sg+2sb+2r, und (m+y) ist m+2tl. Wir lassen wieder das beiden Seiten gemeinschaftliche m fort und behaupten, dass 2hl+2sg+2db+2r gleich 2tl ist. Das ist der Fall, denn r ist um 1 grösser als h, also ist (s+r) um 1 grösser als (s+h), also ist (s+r) gleich q. Nun war schon bewiesen, dass die Differenz zwischen tl und hl gleich gl ist. Wenn das festgehalten wird, so können wir behaupten, dass 2sg+2db+2r gleich 2gl ist. Denn sd+s ist gleich sg, also ist 2sg gleich 2ds+2s, ferner ist db gleich dt+d, also ist 2db gleich 2dt+2d, also ist 2sg+2db gleich 2ds+2dt+2s+2d, dieses ist aber gleich 2d(s+t)+2(s+d). Da nun (s+b) gleich c ist, ist (s+t) gleich l, und da (s+r) gleich q ist, ist (s+r+d) gleich (q+d), nun war aber (q+d) gleich l, also ist 2sg+2db+2r gleich 2dl+2l. Aber 2dl+2l ist gleich 2gl. Und wenn man dazu 2h l addiert, so erhält man 2gl+2hl, was, wie oben bewiesen, gleich 2tl ist. Also ist ist (x+z) gleich (m+y), und wir haben also drei Zahlen gefunden, deren erste, m, vermehrt um den aten Teil der anderen beiden, gleich der 2ten, n, vermehrt um den bten Teil der übrigen, und gleich der dritten, x, vermehrt um den cten Teil der übrigen, ist, das war es, was wir wollten.

54. Aufgabe: Eine Zahl der Art zu finden, dass ein gewisser Teil oder die Summe gewisser Teile derselben um eine gegebene Zahl grösser ist, als ein andrer gegebener Teil oder die Summe andrer gegebener Teile, die kleiner sind als die ersten. Es seien

die Teile, deren Summe die grössere ist, $\frac{b}{a}$ der gesuchten Zahl, $\frac{c}{d}$ und $\frac{1}{h}$ derselben, die Teile, deren Summe kleiner ist, $\frac{s}{g}$ der Zahl und $\frac{t}{k}$ von ihr. Wir wollen nun eine Zahl finden der Art, dass die Summe der erstgenannten Teile, von derselben genommen, die kleinere Summe der Teile um m übertrifft. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller der Nenner der gegebenen Teile, nämlich a, d, h, g, k, sei l. $\frac{b}{a}$ von l sei n, $\frac{c}{d}$ von l sei x, $\frac{1}{h}$ von l sei y Die Summe der grösseren Teile, von l genommen, sei demnach (n+x+y). Es seien ferner $\frac{s}{g}$ von l gleich p, $\frac{t}{k}$ von l gleich z, demnach ist die kleinere Summe der Teile (p+z). Die Differenz zwischen (n+x+y) und (p+z) sei q. Wir bilden nun die Proportion l : r=q : m und behaupten, dass r die gesuchte Zahl ist[24]. Beweis: Wir bezeichnen $\frac{b}{a}$ von r mit o, $\frac{c}{d}$ von r mit v, $\frac{1}{h}$ von r mit w, demnach ist die Summe dieser Teile (o+v+w). Ferner seien $\frac{s}{g}$ von r gleich i, und $\frac{t}{k}$ von r sei j, demnach die Summe dieser Teile (i+j). Nun ist es klar, dass sich $\frac{b}{a}$ von r zu r, wie $\frac{b}{a}$ von l zu l verhält, da sie beide gleich dem Verhältnis von $\frac{b}{a}$ von a zu a sind. Daher ist es klar, dass das Verhältnis $\frac{b}{a}$ von l zu $\frac{b}{a}$ von r gleich dem Verhältnis l : r ist, indem man die inneren Glieder vertauscht. Demnach ist n : o wie l : r, und ebenso zeigt man, dass x : v wie l : r und dass y : w wie l : r ist. Addieren wir nun, so ergibt sich, dass die Summe (n+x+y) sich zu (o+v+w) wie l : r verhält. Ebenso beweist man, dass (p+z) sich zu (i+j) wie l : r verhält. Also verhält sich (n+x+y) zu (o+v+w) wie (p+z) : (i+j). Vertauschen wir die inneren Glieder, so erhalten wir (n+x+y) : (p+z) wie (o+v+w) : (i+j). (n+x+y) ist aber grösser als (p+z), also ist (o+v+w) grösser als (i+j). Sei die Differenz zwischen (o+f+v) und (i+j) gleich f. Da nun (n+x+y) sich zu (o+v+w) wie l zu r verhielt, und (p+z) zu (i+j) sich auch wie l : r verhält, so bilden wir die Differenzen und erhalten q : f wie l : r. Also ist das Verhältnis von q zu m und zu f dasselbe, also ist m=f. Nun war die Differenz von (o+v+w) und (i+j) gleich f, also ist die Differenz

zwischen (o+v+w) und (i+j) auch gleich m. So haben wir also eine Zahl der Art gefunden, nämlich r, dass $\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{d}+\frac{1}{h}\right)$ derselben um m grösser waren als $\left(\frac{s}{g}+\frac{t}{k}\right)$ von ihr, und das war, was wir wollten.

55. Wenn eine Zahl, vermehrt um einen gegebenen Teil oder eine Summe von Teilen einer gegebenen zweiten Zahl, um eine gewisse Zahl kleiner ist, als die zweite Zahl, vermehrt um einen kleineren Teil oder eine kleinere Summe von Teilen der ersten Zahl, so kann man eine dritte Zahl finden der Art, dass die erste gegebene Zahl, vermehrt um den grösseren Teil oder die grössere Summe von Teilen, die von den beiden übrigen genommen werden, gleich ist der zweiten gegebenen Zahl, vermehrt um den kleineren Teil oder die kleinere Summe von Teilen, die von den übrig gebliebenen Zahlen genommen werden.

Die erst gegebene Zahl sei a, die zweite b. Die grössere Summe von Teilen sei aus c Teilen d und einem Teil h gebildet, die kleinere Summe von Teilen sei s Teile g. Es sei $a+\frac{c}{d}$ von b $+\frac{1}{h}$ von b um t kleiner als $b+\frac{s}{g}$ von a. Behauptung: Man kann eine dritte Zahl finden so, dass $a+\left(\frac{c}{d}+\frac{1}{h}\right)$ der beiden andern Zahlen gleich $b+\frac{s}{g}$ der beiden übrigen Zahlen ist.

Beweis: Da $\frac{c}{d}+\frac{1}{h}$ grösser ist als $\frac{s}{g}$, kann man eine Zahl finden, von der $\left(\frac{c}{d}+\frac{1}{h}\right)$ um t grösser ist als $\frac{s}{g}$ Teile von ihr. Sei diese Zahl k, wir behaupten dann, dass k die gesuchte Zahl ist. Beweis: $\frac{s}{g}$ von k sei l, dann ist $\left(\frac{c}{d}+\frac{1}{h}\right)$ von k gleich l+t, da $\left(\frac{c}{d}+\frac{1}{h}\right)$ von k um t grösser ist als $\frac{s}{g}$ von k. Sei $a+\left(\frac{c}{d}+\frac{1}{h}\right)$ von b gleich m, also $b+\frac{s}{g}$ von a=m+t. Nachdem dieses alles beachtet ist, werden wir zeigen, dass $a+\left(\frac{c}{d}+\frac{1}{h}\right)$ von (k+b) gleich $b+\frac{s}{g}$ von (a+b) ist. Das ist der Fall, denn $a+\left(\frac{c}{d}+\frac{1}{h}\right)$

von b ist gleich m und $\left(\frac{c}{d}+\frac{1}{h}\right)$ von k ist gleich $(l+t)$, also ist $a+\left(\frac{c}{d}+\frac{1}{h}\right)$ von $(k+b)$ gleich $(m+l+t)$. Ferner ist $b+\frac{s}{g}$ von a gleich $(m+t)$, aber $\frac{s}{g}$ von k ist gleich l, also ist $k+\frac{s}{g}$ von $(a+k)$ gleich $(m+l+t)$. Nun war $a+\left(\frac{c}{d}+\frac{1}{h}\right)$ von $(b+k)$ auch gleich $(l+m+t)$, also ist $a+\left(\frac{b}{c}+\frac{1}{h}\right)$ von $(b+k)$ gleich $b+\frac{s}{g}$ von $(a+k)$, w. z. b. w.

56. Aufgabe: Eine Zahl zu finden der Art, dass ein gewisser Teil von ihr oder eine gewisse Summe von Teilen von ihr, gleich einem, dem erstgenannten Teil oder der erstgenannten Summe von Teilen nicht gleichen Teil oder einer nicht gleichen Summe von Teilen einer gegebenen Zahl ist.

Beispiel: Wir wollen eine Zahl suchen von der $\left(\frac{1}{a}+\frac{b}{c}\right)$ gleich $\frac{d}{h}$ einer gegebenen Zahl s sind. Es sei $\frac{d}{h}$ von s gleich g, $\left(\frac{1}{a}+\frac{b}{c}\right)$ von s gleich t. Stellen wir nun die Propation $s:k=t:g$ her, so ist k die gesuchte Zahl.

Beweis: $\left(\frac{1}{b}+\frac{b}{c}\right)$ von k bezeichnen wir mit l. Klar ist, dass das Verhältnis von $\left(\frac{1}{a}+\frac{b}{c}\right)$ von s zu $\left(\frac{1}{a}+\frac{b}{c}\right)$ von k gleich dem Verhältnis von s zu k ist, also ist $t:l=s:k$, also ist das Verhältnis von t zu g und l dasselbe, also ist g gleich l, also ist $\left(\frac{1}{a}+\frac{b}{c}\right)$ von k gleich $\frac{d}{h}$ der gegebenen Zahl, w. z. b. w.

57. Aufgabe: Zwei Zahlen zu finden der Art, dass die erste, vermehrt um einen gegebenen Teil der zweiten, gleich der zweiten, vermehrt um einen anderen Teil der ersten, ist. Die Zahlen, durch welche die gegebenen Teile benannt sind, seien a und b, und wir wollen zwei Zahlen suchen, so dass die erste, vermehrt um $\frac{1}{a}$ der zweiten, gleich der zweiten, vermehrt um $\frac{1}{b}$ der ersten, ist. Siehe, wir bezeichnen die Zahl vor a mit c und die Zahl vor b mit d, muliplizieren c mit b und bezeichnen das Produkt mit h. Das sei die erste Zahl. Dann multiplizieren wir d mit a und be-

zeichnen das Produkt mit s, das sei die zweite Zahl, und wir behaupten: $h+\frac{1}{a}.s$ ist gleich $s+\frac{1}{b}.h$. Beweis: $\frac{1}{a}$ von s ist gleich d, weil a mit d multipliziert wurde und s ergab, und $\frac{1}{b}$ von h ist c, weil b mit c multipliziert wurde und h ergab, also ist $h+\frac{1}{a}.s$ gleich $c.b+d$. Aber $c.b+b$ ist gleich $a.b$, also ist $a.b$ um 1 grösser, als $c.b+d$, weil b um 1 grösser ist als d, also ist $a.b$ um 1 grösser als $h+\frac{1}{a}.s$. Ferner ist $s+\frac{1}{b}.h$ gleich $d.a+c$, aber $d.a+a$ ist gleich $a.b$, also ist $a.b$ um 1 grösser als $s+\frac{1}{b}.h$. Nun war aber $a.b$ auch 1 grösser als $h+\frac{1}{a}.s$, also ist $h+\frac{1}{a}.s$ gleich $s+\frac{1}{b}.h$, w. z. b. w.

58. Aufgabe: Drei Zahlen der Art zu finden, dass die Summe der ersten und der dritten die zweite so oft als Faktor enthält, wie eine gegebene Zahl angibt, und dass die Summe der zweiten und dritten die erste so oft als Faktor enthält, wie eine gegebene zweite Zahl angibt. Die gegebenen Zahlen seien a und b. Wir bezeichnen die auf a folgende Zahl mit c, sie sei die erste Zahl. Die auf b folgende Zahl sei d, sie soll die zweite Zahl sein. Dann multiplizieren wir a mit b und ziehen von dem Produkt 1 ab, die Differenz bezeichnen wir mit s, sie soll die dritte Zahl sein. Wir behaupten dann, dass c, d und s die gesuchten Zahlen sind. Wir wollten, dass $(c+s)$ den Faktor d a mal, und $(d+s)$ den Faktor c b mal enthält. Beweis: s ist gleich $a.b-1$ und c ist gleich $1+a$, also ist $(c+s)$ gleich $ab+a$, aber $ab+a$ ist gleich $a.d$, also ist $(c+s)$ gleich $a.d$ und enthält deshalb den Faktor d a mal, da ferner s gleich $a.b-1$ und d gleich $b+1$ ist, ist $(d+s)$ gleich $a.b+b$, aber $a.b+b$ ist gleich $c.b$, also ist $(d+s)$ gleich $c.b$. Das Produkt $c.b$ enthält den Faktor c also b mal. Also enthält $(c+s)$ den Faktor d a mal und $(d+s)$ den Faktor d a mal. W. z. b. w.

59. Die Zahl, die sich aus den Quadraten gegebener Zahlen zusammensetzt, ist gleich dem Quadrat der aus den gegebenen gebildeten Zahl. Die gegebenen Zahlen seien a, b, c, die aus den Quadraten a^2, b^2, c^2 zusammengesetzte Zahl sei d, die aus den Zahlen a, b, c, gebildete sei h. Behauptung d ist gleich h^2. Beweis: Weil jede Quadratzahl

aus 2 der Grundzahl gleichen Zahlen zusammengesetzt ist, ist d aus den Zahlen (a . a), (b . b), (c . c) gebildet. Aus dem Vorigen ist aber bewiesen, dass das Produkt der aus den Zahlen a, b, c, zusammengesetzten Zahl in die aus den Zahlen a, b, c, zusammengesetzte auch gleich d ist, also hat man die aus den Zahlen a, b, c, gebildete Zahl h mit sich selbst multipliziert und d erhalten, also ist d gleich h^2, w. z. b. w.

60. Die Zahl, die sich aus den dritten Potenzen gegebener Zahlen zusammensetzt, ist gleich der dritten Potenz der aus den gegebenen Zahlen gebildeten Zahl. Die gegebenen Zahlen seien a, b, c, die aus den dritten Potenzen der gegebenen Zahlen a, b, c, zusammengesetzte Zahl sei d, die aus a, b, c, gebildete Zahl sei h. Behauptung: d ist gleich h^3. Beweis: Da jede dritte Potenz aus drei der Grundzahl gleichen Zahlen zusammengesetzt ist, ist d aus den Zahlen (a . a . a), (b . b . b), (c . c . c), zusammengesetzt, also ist d gleich dem Produkt der aus den Zahlen a, b, c zusammengesetzten Zahl in die aus den Zahlen a, b, c, a, b, c, zusammengesetzte. Aber die aus den Zahlen a, b, c, a, b, c, gebildete Zahl ist gleich dem Produkte der aus a, b, c, zusammengesetzte Zahl in die aus a, b, c zusammengesetzte, das ist gleich dem Quadrat der aus a, b, c, gebildeten Zahl Also ist d gleich dem Produkt der aus a, b, c, gebildeten Zahl in das Quadrat der aus a, b. c. zusammengesetzten, daher ist d gleich dem Produkt aus h und h^2, also ist die dritte Potenz von h gleich d, w. z. b. w.

61. Addiert man das Produkt aus einer gegebenen Zahl und dem Quadrat einer zweiten gegebenen Zahl zu dem Produkt aus der zweiten gegebenen und dem Quadrat der ersten Zahl, so ist das Resultat gleich dem Produkt der beiden Zahlen multipliziert mit ihrer Summe. Die gegebenen Zahlen seien a und b, das Quadrat von a sei c, das Quadrat von b sei d; a . d wurde zu c . b addiert und sei gleich h, a . b sei gleich s. Behauptung: h ist gleich s (a+b). Beweis: ad setzt sich aus den Zahlen a, b, b zusammen, da d gleich b^2 ist, also ist a . d gleich s . b. Ebenso zeigt man, dass das Produkt b . c gleich dem Produkt aus der aus a und b zusammengesetzten Zahl und a ist, also ist b . c gleich s . a. Also ist die Summe der Produkte a . d+b . c gleich der Summe der Produkte

s . a + s . b. Aber s . a + s . b ist gleich dem Produkt aus s in (a + b), also ist (ad + bc) gleich s . (a + b), w. z. b. w.

62. S i n d z w e i Z a h l e n g e g e b e n, s o i s t d i e d r i t t e P o t e n z i h r e r S u m m e u m d a s d r e i f a c h e P r o d u k t d e r b e i d e n Z a h l e n, m u l t i p l i z i e r t m i t i h r e r S u m m e, u n d u m d i e d r i t t e P o t e n z d e r z w e i t e n Z a h l g r ö s s e r a l s d i e d r i t t e P o t e n z d e r e r s t e n Z a h l. Die gegebenen Zahlen seien a und b, das Produkt a . b sei c, die dritte Potenz von a sei d, die dritte Potenz von (a + b) sei h, die dritte Potenz von b sei s. Behauptung: h ist um 3c (a + b) + s grösser als d. Beweis: (a + b), mit sich selbst multipliziert, ist gleich $a^2 + b^2 + 2 . a . b$, also ist $(a+b)_2$ gleich $a^2 + b^2 + 2c$. Man multipliziere nun $(a^2 + b^2 + 2c)$ mit (a + b), so enthält man h, weil $(a+b)^3$ gleich h ist. Behauptung: h ist um [3c(a + b) + s] grösser als d. Das ist der Fall, denn, wenn man a^2 mit (a + b) multipliziert, so erhält man das Produkt $a^2 . a$, welches gleich d ist, vermehrt um das Produkt a^2 b; und ebenso erhält man bei Multiplikation von b^2 mit (a + b) als Resultat das Produkt $b^2 . b$, welches gleich s ist, vermehrt um $b^2 . a$, also ist das Ergebnis der Multiplikation von $(a^2 + b^2)$ mit ab die Summe $[d + s + a^2b + b^2a]$ aber $a^2 . b + b^2 . a$ ist gleich dem Produkt aus (ab) und (a + b), also ergibt $(a^2 + b^2)$, multipliziert mit (a + b), die Summe [d + s + c(a + b)]. Aber c, multipliziert mit (a + b), ergibt c . (a + b) also ergibt 2c, multipliziert mit (a + b), 2c . (a + b). Nun hatten wir als Resultat der Multiplikation von $(a^2 + b^2)$ mit (a + b) die Summe [d + s + c . (a + b)] erhalten, wenn man also $[a^2 + b^2 + 2c]$ mit (a + b) multipliziert, so ist das Resultat gleich [d + s + 3c(a + b)]. Aber $[a^2 + b^2 + 2c]$, mit (a + b) multipliziert, ist gleich h, also ist h gleich [d + s + 3c . (a + b)], also ist h um [3 (a b) (a + b) + s] grösser als d, w. z. b. w.

Durch eben diesen Beweis ist nun schon bewiesen, dass die die dritte Potenz von (a + b) gleich $d + s + 3a^2b + 3b^2a$ ist. Denn die dritte Potenz von (a + b) ist gleich d + s + 3c (a + b). Aber c (a + b) ist gleich der Summe der Produkte a^2b und b^2a, also ist 3c(a + b) gleich dem Dreifachen der Summe der Produkte a^2b und b^2a, also ist die dritte Potenz von (a + b) gleich $d + s + 3a^2b + 3b^2a$. w. z. b. w.

Einleitung.

Zwei Elemente können in der Ordnung ihrer Zusammenstellung sich auf 2 Weisen unterscheiden, entweder steht das eine voran oder das andre. Die Verschiedenheit der Anordnung von Elementen kann eine zweifache sein; entweder sie unterscheiden sich durch die Elemente, sind aber in der Anzahl derselben übereinstimmend, oder sie unterscheiden sich nur durch ihre Anordnung.

Verbindet man ein und dasselbe Element mit zwei Complexionen von Elementen, die sich irgendwie unterscheiden, so sind die neuen Complexionen gleichfalls verschieden. Beispiel: Die Complexionen a b c und b c d sollen sich durch ihre Elemente unterscheiden, es werde h zu jeder Complexion hinzugefügt, so dass die Complexionen habc und hbcd werden. Siehe, diese Complexionen sind in derselben Weise verschieden. Die Sache liegt ebenso, wenn sich die Complexionen nur durch die Reihenfolge unterscheiden, wenn z. B. h mit jeder der Complexionen a b c und b a c verbunden wird und die Reihenfolge bleibt, wie sie war, so dass die neuen Complexionen h a b c und h b a c sind; diese unterscheiden sich in derselben Weise wie früher.

Die Anzahl der Complexionen einer bestimmten Klasse gegebener Elemente ist gleich der Anzahl der Complexionen derselben Klasse andrer Elemente, wenn die Complexionen von derselben Art sind, d. h. wenn die ersten sich durch die Elemente unterscheiden, sollen sich auch die andern durch die Elemente unterscheiden, und wenn die ersten sich nur durch die Reihenfolge unterscheiden, sollen auch die andern nur durch die Reihenfolge verschieden sein.

Verbindet man mit einer gegebenen Complexion von Elementen verschiedene Elemente, so entstehen Complexionen, die sich durch ihre Elemente unterscheiden. Beispiel: Die Complexion a b c werde mit d verbunden und ergebe d a b c, und sie werde mit h verbunden und ergebe h a b c, so unterscheiden sich d a b c und h a b c durch ihre Elemente.

63. Ist die Anzahl der Permutationen einer gegebenen Zahl verschiedener Elemente gleich einer gewissen Zahl, so ist die Anzahl der Permutationen einer um 1 grösseren Zahl ver-

schiedener Elemente gleich dem Produkt aus der vorigen Permutationszahl und der auf die gegebene folgenden Zahl.

Es seien die Elemente a, b, c, d, h, ihre Anzahl sei s, die auf s folgende Zahl sei g. Die Anzahl der Permutationen der Elemente a, b, c, d, h sei t. Die Elemente a, b, c, d, h, f, seien um 1 mehr als die Elemente a, b, c, d, h, ihre Anzahl ist also gleich g. Behauptung: Die Anzahl der Permutationen der Elemente a, b, c, d, h, f, ist gleich dem Produkt t . g.

Beweis: f werde mit jeder einzelnen der Complexionen von a, b, c, d, h verbunden, und zwar an erste Stelle gesetzt, es bleiben dann Complexionen, die sich nur durch die Anordnung unterscheiden, daher wird die Anzahl der Complexionen, wenn f das erste Element ist, gleich t sein. Da nun die Permutationen von a, b, c, d, h an Zahl t sind, sind die Permutationen der Elemente a, b, c, d, f auch t. Verbindet man nun h mit ihnen, indem man es vor jede Complexion setzt, so bleiben Complexionen, die sich nur durch die Reihenfolge unterscheiden, und daher ist die Anzahl der Complexionen, wenn h jetzt an erster Stelle steht, auch gleich t. Ebenso beweist man, dass man jedes Elemeut an erste Stelle setzen kann, und dass die Anzahl der Complexionen, in denen es an erster Stelle steht, gleich t ist. Also ist die Anzahl der sämtlichen Complexionen gleich t, multipliziert mit der Anzahl der Elemente, deren Anzahl ist aber g. Also ist die Anzahl der Permutationen von a, b, c, d, h, f gleich dem Produkt g . t.

Klar ist es, dass unter allen diesen Complexionen nicht 2 vorkommen, die einander gleich sind. Denn als eines der Elemente an erster Stelle stand, waren keine zwei gleiche Complexionen da, denn die Complexionen, mit denen es verbunden wurde, waren verschieden, und so blieben sie es, als es mit ihnen verbunden wurde. Demnach ist es kein Zweifel, dass die Complexionen in der Reihenfolge verschieden blieben, als das erste Element ein andres wurde. Also ist es klar, dass unter allen Complexionen nicht 2 gleiche sind. Wir behaupten aber auch, dass es ausser den aufgezählten keine Complexionen gibt. Denn wenn es der Fall sein könnte, so soll diese Complexion dfhgab sein, aber d war mit den übrigen Elementen auf jede Weise verbunden,

und eine der Verbindungen der übrigen Elemente war f h g a b, also ist d f h g a b eine der aufgezählten Complexionen. Wenn dem aber so ist, d. h. wenn unter allen Complexionen keine zwei gleiche vorhanden sind und es auch ausser diesen keine gibt, so ist die Zahl der Permutationen der Elemente a b c d h f gleich dem Produkt g . t, w. z. b. w.

Damit ist bewiesen, dass die Anzahl der Permutationen gegebener Elemente, gleich der Zahl ist, die sich aus den Zahlen der natürlichen Reihe von 1 bis zu der Zahl zusammensetzt, die die Anzahl der gegebenen Elemente bestimmt. Denn die Permutationszahl von 2 ist 2, und das ist gleich 1 . 2, die Permutationszahl von 3 ist gleich dem Produkt 3 . 2, das gleich 1 . 2 . 3 ist, und so zeigt man das ohne Ende weiter.

64. Die Anzahl der Variationen zweiter Klasse einer gegebenen Anzahl verschiedener[24]) Elemente ist gleich dem Produkt aus der gegebenen Zahl in die ihr vorangehende. Die Elemente seien a, b, c, d, h, ihre Zahl sei s, die Zahl vor s sei g. Behauptung: Die Variationen 2ter Klasse der Elemente a, b, c, d, h ist gleich der Zahl, die durch das Produkt s . g ausgedrückt wird.

Beweis: Stellt man a an erste Stelle und verbindet es mit jedem der übrigen Elemente, deren Anzahl g ist, so sind die verschiedenen Complexionen, an deren erster Stelle a steht, gleich g. So zeigt man, dass jedes der übrigen Elemente an erste Stelle gesetzt werden kann, und dass die Anzahl der Complexionen, wenn es an erster Stelle steht, gleich g ist. Demnach ist die Anzahl aller dieser Complexionen gleich g, multipliziert mit der Anzahl der Elemente. Die Zahl der Elemente ist aber s, also ist die Anzahl dieser Complexionen gleich g . s.

Wir behaupten, dass von allen Complexionen, die wir aufgezählt, nicht 2 gleich sind, die sich etwa nicht durch die Elemente oder durch die Reihenfolge unterscheiden. Denn wenn eines der Elemente an erster Stelle steht, können nicht 2 gleiche Complexionen entstehen, denn die Elemente, die mit ihm verbunden werden, sind verschieden, und gleich könnten sie zweifellos doch nicht sein, wenn das erste Element in beiden nicht gleich ist, denn wenigstens unterscheiden sie sich durch die Reihenfolge, also sind in diesen Complexionen keine zwei gleiche vorhanden,

Wir behaupten aber auch, dass es ausser den aufgezählten keine Complexion gibt, denn wenn das möglich wäre, so sei diese Complexion ch, aber c ist mit jedem der andern verbunden worden, eines der andern ist aber h, also ist ch eine der Complexionen, die wir aufgezählt haben, also gibt es keine Complexion ausser den aufgezählten. Wir haben aber schon bewiesen, dass unter allen diesen Complexionen keine doppelt vorkommt, also ist die Anzahl dieser Complexionen gleich der Zahl, die durch das Produkt s . g ausgedrückt wird, w. z. b. w.

65. Wenn eine gewisse Anzahl von Elementen gegeben ist, und die Zahl der Variationen einer Klasse, die von der Zahl der Elemente verschieden und niedriger als dieselbe ist, ist gleich einer dritten Zahl, so ist die Anzahl der Variationen der um 1 höheren Klasse aus diesen Elementen gleich der Zahl, die dem Produkt aus der dritten Zahl in die Differenz der ersten und zweiten entspricht.

Die Elemente seien a, b, c, d, h, f. Ihre Anzahl sei g, t sei von g verschieden und kleiner als g. Die Variationen der tten Klasse aus diesen Elementen seien gleich e, m sei die Zahl nach t. Die Differenz zwischen g und t sei n. Behauptung: Die Variation der mten Klasse aus diesen Elementen ist gleich l . n.

Beweis: Eine Complexion der tten Klasse dieser Elemente sei abc, die andern Elemente sind dann d, h, f, s, ihre Anzahl ist gleich n. Setzt man nun jedes der der übrigen Elemente d, h, f, s an erste Stelle vor die Complexion abc, so sind die neuen Complexionen verschieden, und die Anzahl der Elemente in den Complexionen ist gleich m, weil zu den Elementen der ersten Complexion ein Element hinzugefügt wurde. Da nun die Anzahl der Element d, h, f, s gleich n ist, sind die aus der Complexion abc hervorgegangenen neuen Complexionen n an Zahl. So zeigt man, dass die aus jeder Complexion der Variationen tter Klasse dieser Elemente neu entstehenden Complexionen an Zahl n sind. Also ist die Anzahl aller dieser Complexionen, d. h. der Variationen mter Klasse aus diesen Elementen, gleich n, multipliziert mit der Anzahl der Variationen tter Klasse aus diesen Elementen. Aber die Zahl der Variationen tter Klasse aus diesen Elementen war

gleich 1, also ist die Anzahl der Variationen mter Klasse aus diesen Elementen gleich der durch das Produkt n . 1 dargestellten Zahl.

Wir behaupten nun, dass unter den genannten Complexionen nicht zwei gleiche vorkommen. Das ist so, denn betrachtet man eine Complexion, so wurden mit diesen immer andre Elemente verbunden, deshalb müssen diese neuen Complexionen verschieden sein. Zweifellos aber können an sich verschiedene Complexionen, die mit einem Element, welches es auch sei, verbunden werden, nicht gleich werden. Wir behaupten ferner, dass es keine Complexion gibt ausser denen, die wir aufgezählt haben. Denn wäre das möglich, so sei diese Complexion f d b s, aber vor d b s war doch jedes der übrigen Elemente als erstes gesetzt, und eines der übrigen Elemente ist f, also ist fdbs eine der aufgezählten Complexionen. Da nun unter den aufgezählten Complexionen keine 2 gleich sind und es ausser den aufgezählten keine gibt, ist die Zahl der Variationen mter Klasse aus diesen Elementen gleich n . 1, w. z. b. w.

Damit ist bewiesen, dass die Variationen der durch eine gegebene erste Zahl bestimmten Klasse einer durch eine zweite gegebene Zahl bestimmten Anzahl von Elementen gleich der Zahl ist, die sich aus Zahlen einer natürlichen Reihe zusammensetzt, deren letzte die zweite Zahl ist, und deren Anzahl gleich der ersten gegebenen Zahl ist. Es sei die Anzahl der Elemente s, die Zahlen a, b, c, d, h, f, s sollen die natürliche Zahlenreihe von 1 an darstellen. Dann ist es klar, dass die Anzahl der Variationen 2ter Klasse von diesen Elementen gleich der durch das Produkt f . s dargestellten Zahl ist, das sind aber 2 Zahlen, die in der natürlichen Reihe auf einander folgen, und deren letzte s ist. Die Anzahl der Variationen 3ter Klasse aus diesen Elementen ist nun gleich dem Produkt h. (f . s), da die Differenz zwischen s und 2 gleich h ist, das ist also die aus h, f und s zusammengesetzte Zahl. Ebenso zeigt man, dass die Variationen der 4ten Klasse gleich der aus d, h, f und s gebildeten Zahl sind, und so beweist man es für jede Zahl.

66. W e n n e i n e A n z a h l v o n E l e m e n t e n g e g e b e n i s t , u n d d i e Z a h l d e r C o m b i n a t i o n e n e i n e

durch eine zweite Zahl bestimmten Klasse dieser Elemente ist gleich einer gegebenen dritten Zahl, während die Anzahl der Permutationen von so viel Elementen, wie die zweite Zahl angibt, gleich einer vierten gegebenen Zahl ist, so ist die Anzahl der Variationen der durch die zweite gegebene Zahl bestimmten Klasse von so viel Elementen, wie die erste angibt, gleich dem Produkt der dritten gegebenen Zahl in die vierte.

Die Elemente seien a, b, c, d, h, f, ihre Anzahl sei s. Die Zahl der Combinationen der gten Klasse sei t, die Zahl der Permutationen aus g Elementen sei l. Behauptung: Die Anzahl der Variationen der gten Klasse aus s Elementen ist gleich t . l. Beweis: Eine der Complexionen aus der Zahl der Combinationen der gten Klasse sei b c d, dann ergeben sich aus derselben durch Permutation l neue Complexionen. In gleicher Weise zeigt man, dass sich aus jeder der Complexionen der Combinationen gter Klasse aus diesen Elementen l neue bilden lassen, also lassen sich aus der Gesamtheit dieser Complexionen so viele neue ableiten, wie ihre Anzahl, mit l multipliziert, angibt. Ihre Anzahl war aber t, also ist die Anzahl aller dieser Complexionen t . l. Wir behaupten nun, dass unter allen den aufgezählten Complexionen keine zwei gleich sind. Denn da, wo die Elemente verschiedene sind, sind sie permutiert worden, und die Anzahl der Permutationen war l, wie wir vorausgesetzt hatten. Zweifellos aber können die Complexionen, die verschiedene Elemente enthalten, durch Permutation nicht gleich werden. Wir behaupten ferner, dass keine Complexionen ausser den aufgezählten vorhanden sind. Denn, wenn das möglich wäre, so sei die Complexion f d b, aber alle Elemente b, d, f sind bereits permutiert worden, und eine der Permutationen ist f d b, also ist f d b eine der aufgezählten Complexionen, also ist keine Complexion weiter vorhanden. Wenn dem aber so ist, d. h., wenn unter den aufgezählten Complexionen nicht zwei gleich und keine weiteren vorhanden sind, so ist die Anzahl der Variationen der gten Klasse aus den Elementen a, b, c, d, h, f gleich der durch das Produkt t . l dargestellten Zahl, w. z. b. w.

67. Wenn die Zahl verschiedener Elemente eine gegebene ist, und es ist die Anzahl der Variationen der durch eine zweite gegebene Zahl bestimmten Klasse dieser Elemente gleich einer dritten Zahl und die Zahl der Permutationen von so viel Elementen, wie die zweite Zahl angibt, gleich einer gegebenen vierten Zahl, so ist die Anzahl der Combinationen von der Klasse der zweiten Zahl aus diesen Elementen so gross wie die der Einheiten der Zahl, welche angibt, wie oft die vierte in der dritten als Faktor enthalten ist.

Die Elemente seien a, b, c, d, h, ihre Anzahl sei gleich s. Die Anzahl der Variationen gter Klasse aus diesen Elementen sei gleich t, die Anzahl der Permutationen von g Elementen sei l. Behauptung: l ist in t so viele Male enthalten, wie es Combinationen der gten Klasse aus diesen Elementen gibt. Beweis: Die Anzahl der Combinationen gter Klasse sei m. Nun war die Zahl der Permutationen aus g Elementen gleich l, und die Anzahl der Variationen gter Klasse aus diesen Elementen war gleich t. Also ist t gleich dem Produkt l . g, also ist l in t so viele Male enthalten, wie m Einheiten hat, d. i. aber die Zahl der Combinationen gter Klasse aus diesen Elementen.

68. Wenn eine Anzahl von verschiedenen Elementen gegeben ist, und es ist die Zahl der Combinationen einer durch eine zweite gegebene Zahl bestimmten Klasse dieser Elemente gleich einer gegebenen dritten Zahl, und die Differenz zwischen der ersten und der zweiten Zahl ist gleich einer gegebenen vierten Zahl, so sind die Combinationen der durch die vierte bestimmten Klasse gleich der gegebenen dritten Zahl.

Die Elemente seien a, b, c, d, h, f, s, ihre Anzahl sei g, die Combinationen der tten Klasse dieser Elemente seien an Zahl gleich l, die Differenz zwischen g und t sei m. Behauptung: Die Combinationen der mten Klasse aus diesen Elementen sind an Zahl auch gleich l.

Wir zeigen zunächst, dass, wenn zwei Complexionen der Combinationen dieser Elemente verschieden sind, auch die Complexionen des Restes der Elemente verschieden sein müssen. Denn greifen wir die beiden Complexionen abcd und acdh als verschiedene Combinationen heraus, so ist die Combination des Restes der Elemente für die Complexion a b c d die Complexion h f s, und die Combination des Restes der Elemente für die Complexion acdh ist die Complexion b f s. Wir behaupten nun, dass die Elemente in h f s und b f s nicht dieselben sind. Denn wenn das möglich wäre, so müssten h und b identisch sein, wäre das aber der Fall, so wären a b c d und a c d h nicht verschiedene Combinationen, das war doch aber vorausgesetzt, also ist die Annahme falsch, und die Complexionen h f s und b f s sind verschiedene Combinationen. Damit ist bewiesen, dass die Combinationen des Restes zweier verschiedener Complexionen auch verschieden sind.

Wenn das beachtet ist, so wollen wir beweisen, dass die Combinationen der mten Klasse aus diesen Elementen auch an Zahl gleich l sind. Zu dem Zweck nehmen wir zu jeder Complexion der Combinationen der tten Klasse dieser Elemente die Complexion, die sich aus dem Rest der Elemente, deren Zahl gleich m ist, zusammensetzt, da aber die ersten Complexionen verschieden waren, sind auch die der Reste der Elemente verschieden, und da wir für jede der Combinationen der tten Klasse die des Restes genommen haben, ist die Anzahl der neuen Complexionen gleich der der früheren.

Nun war die Anzahl der Combinationen der tten Klasse dieser Elemente gleich l, also ist auch die Anzahl der Combinationen des Restes der Elemente gleich l. Bewiesen war schon, dass diese Complexionen verschiedene sind. Wir behaupten, dass ausser den aufgezählten keine andere der mten Klasse vorhanden ist. Denn wäre das möglich, so sei diese Complexion c h s, und wir suchen die Combination des Restes, die a b d f ist. Aber abdf ist eine der Combinationen der tten Klasse, für jede dieser Complexionen haben wir aber die des Restes genommen, und der Rest dieser Complexion ist c h s, also ist chs eine der gezählten Combinationen. Wenn dem aber so ist, d. h. wenn ausser den aufgezählten keine Complexion vorhanden ist, und wenn die auf-

gezählten Complexionen verschieden sind, so sind die Combinationen der mten Klasse aus diesen Elementen an Zahl gleich 1.

Das kann man auch noch anders beweisen. Wir setzen voraus, dass die Anzahl der Elemente g ist, die Zahlenreihe bis g sei a, b, c, d, h, f, s, g. Wir behaupten, dass die Anzahl der Combinationen der durch eine beliebige Zahl bestimmten Klasse aus diesen Elementen, gleich der Anzahl der Combinationen der Klasse aus diesen Elementen ist, die durch die Differenz zwischen der Anzahl der Elemente und dieser beliebigen Zahl bestimmt ist. Denn sei diese Zahl c, und sei die Differenz zwischen g und c gleich h, so behaupten wir, dass die Anzahl der Combination der cten Klasse gleich der der hten Klasse aus diesen Elementen ist. Denn die Anzahl der Combinationen der cten Klasse ist so gross wie die Zahl, die angibt, wie oft die aus a, b, c gebildete Zahl in der aus f, s, g gebildeten enthalten ist, und die Zahl der Combinationen der hten Klasse ist so gross wie die Zahl, die angibt, wie oft die aus a, b, c, d, h gebildete Zahl in der aus d, h, f, s, g zusammengesetzten enthalten ist. Wir behaupten nun, dass die Zahl a . b . c . d . h in der Zahl d . h . f . s . g so oft enthalten ist, wie die Zahl a . b . c in der Zahl f . s . g. Denn die Zahl a . b . c . d . h ist gleich dem Produkt der Zahl (d . h) in die Zahl (a . b . c), und die Zahl d . h . f . s . g ist gleich dem Produkt aus der Zahl (d . h) in die Zahl (f . s . g). Siehe, mit (d . h) wurden die zwei Zahlen (a b c) bezw. (f s g) multipliziert und ergaben die Zahlen (a . b . c . d . h) bezw. (d . h . f . s . g), also verhalten sich die Zahlen (a . b . c . d . h) und (d . h . f . s . g) wie (a . b . c) zu (f . s . g), also enthält die Zahl (d . h . f . s . g) die Zahl (a . b . c . d . h) so oft wie (f . s . g) die Zahl (a . b . c) enthält. Also ist die Anzahl der Combinationen der cten Klasse aus diesen Elementen gleich der Anzahl der Combinationen der hten Klasse. Damit ist bewiesen, dass die Anzahl der Combinationen einer beliebigen Klasse aus gegebener Anzahl von Elementen gleich der der Combinationen der Klasse ist, die durch die Differenz der Anzahl der Elemente und der ersten Klassenzahl bestimmt ist.

Damit ist der erste Abschnitt beendet, Preis sei Gott, g. s. E. !

Zweiter Abschnitt.

Inhalt des Kapitels: Wisse, dass die Weisen Gott g. s. E., in der Welt der reinen Geister mit der „Eins“ unter den Zahlen verglichen haben, [25]) wenn es auch eine Zufälligkeit ist, weil die Grundlage aller Zahlen die Eins ist, und weil sie die Ursache ihres Daseins bedeutet. Sie ruft sie hervor, sie ist in allen vorhanden und gehört doch nicht zu ihrer Zahl, denn sie selbst ist keine Zahl, ausser wenn sie geteilt wird, dann aber ist sie nicht mehr Eins. Würde man sich die Eins wegdenken, so verschwänden alle Zahlen, wenn man sich aber diese wegdächte, so würde die Eins nicht verschwinden. Sie hat als Zahl keine Begrenzung nach unten und oben [26]), wenngleich sie die Begrenzung aller Zahlen nach unten und im gewissen Sinne auch nach oben ist. Wollte man der „Eins“ eine Begrenzung nach unten zuschreiben, so wäre das nur, in dem man sie teilt, dann aber ist sie nicht mehr „Eins“ [27]). Wir sagten als Zahl, denn in sofern sie eine Linie, eine Fläche oder einen Körper darstellt, hat sie Grenzen, und zwar bei der Linie die Punkte, bei den Flächen die Linien und bei dem Körper die Flächen, die ihn umgeben. Aber dieses hat sie nicht als Zahl, denn die Linie teilt sich nicht in Punkte und wird nicht aus ihnen zusammengesetzt, die Fläche teilt sich nicht in Linien und wird nicht von ihnen zusammengesetzt.

Siehe, alle Zahlen haben einen Ursprung [28]). Von ihm gehen sie aus, zu ihm kehren sie zurück. Denn wenn man die Einheiten bis zu zehn addiert, so wird zehn die Einheit, und zwanzig ist wie zwei und dreissig wie drei und vierzig wie vier u. s. w., bis man zu hundert kommt. Dann ist dieses die Einheit und zweihundert wie zwei und dreihundert wie drei u. s. w., bis man zu tausend kommt und dieses die Einheit wird, und so geht es bis zur Unendlichkeit weiter. Siehe, damit ist gezeigt, dass alle Zahlen bei neun enden. Siehe nun, eins und die folgenden Zahlen bis neun nennen wir die erste Stufe [29]), zehn und die folgenden Zehner bis neunzig die zweite Stufe, hundert und die folgenden Hunderter bis neunhundert soll dritte Stufe heissen, und tausend und die folgenden Tausender die vierte Stufe.

Auf diese Weise stehen die Einheiten der Stufen bis zur Unendlichkeit in Proportion, d. h. jede einzelne von ihnen steht zu der Einheit der vorangehenden Stufe im Verhältnis von 10 zu 1. Wir sagten: „bis zur Unendlichkeit“, weil man die Zahlen, so weit man will, vermehren kann, d. h. soviel man auch hinzufügt, man kann noch mehr hinzufügen, nicht aber, dass eine Zahl existierte, die unendlich wäre. Denn es ist klar, dass jedwede Zahl ein Ende hat, ihr Ende ist die Einheit, durch die, als letzte, sie vollendet wurde. Kurz, wenn wir gesagt, dass eine Zahl unendlich sei, so ist es klar, dass das nur in der Person des Zählenden liegt[30]), denn das wahre Wesen der Zahl ist die Bestimmung, das Ende der Teile anzugeben, die sie umfasst. Dazu kommt, dass jede Zahl gerade oder ungerade sein muss[31]). Daher kann es nicht umgekehrt sein, d. h. dass man sie unaufhörlich teilen kann, wie das bei einer Linie gesagt werden kann, denn notwendigerweise muss man schliesslich auf „Eins“ kommen, und da bleiben wir stehen. Immerhin kann auch die Zahl Eins geteilt werden als eine benannte Zahl[32]), wie es die Geometer tun, wenn sie eine Rechnung genau durchführen wollen, dann teilen sie die Einheit in 60 Teile und nennen sie Brüche erster Ordnung[33]) (Primen), und jeden dieser Brüche teilen sie in 60 Teile und nennen sie Brüche zweiter Ordnung (Secunhen), und jeden Bruch zweiter Ordnung teilen sie in 60 Teile und nennen sie Brüche dritter Ordnung (Terzen), und so zieht sich die Reihe der Brüche proportional bis ins Unendliche hin, und ihre Grundlage, d. h. ihr Ausgangspunkt ist die erste Stufe, d. h. die Einheit derselben.

Eine unbekannte Zahl findet man auf eine von zwei Weisen, durch Verbindung[34]) oder durch Verminderung[34]), und was es sonst dabei gibt, das ist das Bekannte selbst. Bei der Verbindung gibt es zwei Wege, entweder wir verbinden gleiche Zahlen oder ungleiche; bei der Verbindung ungleicher Zahlen gibt es drei Wege, entweder sie unterscheiden sich durch ihre Grösse oder durch ihre Benennung, sind aber in ihrer Grösse gleich[35]), oder sie sind in Grösse und Benennung gleich und unterscheiden sich nur durch die Reihenfolge[36]). Bei den durch die Grösse unterschiedenen Zahlen gibt es zwei Wege, entweder die Zahlen oder die Zahl, die wir hinzugefügen, sind bekannt oder unbekannt. Und bei den

unbekannten gibt es zwei Wege, entweder es wird durch eine gleiche Grösse, die angegeben ist, vermehrt, wie es bei Reihen[37]) ist, oder sie werden in einem Masse, das nicht angegeben ist, vergrössert, aber sie stehen in Proportion, d. h. das Verhältnis der einen zur anderen ist das gleiche. Bei der Verminderung gibt es zwei Wege, entweder eine Zahl oder Zahlen werden von einer Zahl abgezogen, oder wir teilen eine Zahl durch eine Zahl. Bei der Division gibt es zwei Wege, entweder die Zahl, durch die wir teilen, ist bekannt oder unbekannt, wie beim Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln. Dabei gibt es eine Operation, deren man sich bei den meisten dieser Arten oder bei allen bedient, das ist das Aufsuchen einer Zahl, die sich zu einer Zahl wie die gegebene Zahl zu einer anderen gegebenen verhält, und was dem ähnlich ist, bei der Aufsuchung des Unbekannten aus dem Bekannten. Wir wollen m. G. H. diese Operationen und Wege, durch die man das Gesuchte findet, in diesem Abschnitt erläutern und haben diesen Abschnitt, dieser Untersuchung entsprechend, in 6 Pforten (Kapitel) geteilt.

Erstes Kapitel: Von der Addition einer bekannten Zahl oder bekannter Zahlen zu einer Zahl und der Subtraktion einer bekannten Zahl oder bekannter Zahlen von einer Zahl.

Zweites Kapitel: Von der Addition gleicher Zahlen.

Drittes Kapitel: Von der Addition arithmetischer und geometrischer Reihen.

Viertes Kapitel: Von der Kombinatorik von Elementen, mögen sich die Complexionen durch die Elemente oder durch die Reihenfolge für sich, oder durch beide zusammen unterscheiden.

Fünftes Kapitel: Von der Division einer Zahl durch eine Zahl, mag die Zahl, durch die die Zahl geteilt wird, bekannt oder unbekannt sein.

Sechstes Kapitel: Von den Proportionen.

Erstes Kapitel:

Von der Addition von Zahlen zu einander und der Subtraktion von Zahlen von einander.

Es ist bereits auseinandergesetzt, dass alle Zahlen bei 9 enden. Und wenn dem so ist, wird die Zahl, die am Ende irgend

einer Stufe (Dekade) steht, 9 sein, und die Addition von Zahlen, die neun nicht überschreiten, wird für jeden Verständigen die erste Kenntnis sein.

Wenn du eine beliebige Anzahl von Zahlen addieren willst, so ist es angebracht, dass du jede Zahl von ihnen in eine besondere Reihe schreibst und die Reihen in Rubriken einteilst. In die erste Rubrik schreibst du, was in der betreffenden Zahl von Einheiten der ersten Stufe vorkommt, und wenn sie nichts von der ersten Stufe enthält, so schreibst du eine 0[38]) dorthin, zu zeigen, dass in dieser Rubrik keine Zahl steht. In die zweite Rubrik schreibst du, was in der betreffenden Zahl von der zweiten Stufe vorkommt, und wenn von dieser Stufe nichts vorkommt, so setzest du eine 0 hinein. In die dritte Rubrik schreibst du, was in der betreffenden Zahl von der dritten Stufe vorkommt, und so weiter bis ins Unendliche. Die Reihen schreibst du unter einander, und die Rubriken sollen in allen Reihen einander entsprechen. Und wenn das vollendet ist, schreibst du das Resultat der Addition dieser Zahlen unter diese Reihen in eine besondere Reihe an die Stellen, die den entsprechenden Stufen zukommen.

Der Weg, auf dem du bei Addition dieser Zahlen vorgehen sollst: Addiere, was in allen Reihen in der ersten Rubrik steht, und wenn du mehr als 10 erhältst, mache aus je 10 eine Einheit der zweiten Stufe, denn jede Einheit derselben enthält 10 Einheiten der ersten Stufe. Und was dir übrig bleibt, schreibe in die Reihe unter allen Reihen in die erste Rubrik. Diese Reihe nennen wir die Reihe des Ergebnisses. Dann addiere das, was in der zweiten Rubrik aller Reihen steht, und wenn du mehr als 9 erhältst, mache aus je 10 eine Einheit der dritten Stufe, und was übrig bleibt, schreibe in die Reihe des Ergebnisses in die zweite Rubrik. Dann addiere, was in der dritten Rubrik in allen Reihen steht und schreibe das Resultat in die Reihe des Ergebnisses auf die erwähnte Weise, und so tue, bis alle Zahlen in allen Stufen zu Ende sind. Ist dieses zu Ende geführt, so ist es klar, dass das Ergebnis die Summe aller Zahlen ist, denn die Teile der einen sind in ihrer Gesamtheit zu den Teilen der andern addiert, und das Ganze ist ja gleich der Summe seiner Teile.

Beispiel: Du willst 209 zu 3089 und 7639 addieren.

Schreibe sie in folgender Form: In der ersten Reihe steht 9 in der ersten, 0 in der zweiten, 2 in der dritten Rubrik. Zweite Reihe: 9 in der ersten, 8 in der zweiten, 0 in der dritten, 3 in der vierten Rubrik. Dritte Reihe: 9 in der ersten, 3 in der zweiten, 6 in der dritten, 7 in der vierten Rubrik. Addieren wir alles, was in der ersten Rubrik steht, so erhalten wir 27, du schreibst in die Reihe des Ergebnisses 7 in die erste Rubrik, die 20 werden 2 in der zweiten. Addieren wir, was in der zweiten in allen Reihen steht, so kommt 11 heraus, zwei waren uns dort übrig geblieben, das ist 13; schreibe in die Reihe des Ergebnisses 3 in die zweite Rubrik, die 10 seien 1 in der dritten. Addieren wir, was in der dritten in allen Reihen steht, so ergibt sich 8 und 1, das uns dort übrig geblieben war, das ist 9, schreibe sie in die Reihe des Resultats in die dritte Rubrik. Wir addieren, was in der vierten Rubrik in allen Reihen steht, das gibt 10, daher schreibe 0 in die vierte Rubrik in die Reihe des Ergebnisses, und die 10 schreiben wir als 1 in die fünfte Rubrik der Reihe des Ergebnisses. Damit ist die Addition der Teile dieser Zahlen zu einander beendet, und das Resultat der Addition dieser Zahlen ist zehntausend neunhundert sieben und dreissig.

		2	0	9
	3	0	8	9
	7	6	3	9
1	0	9	3	7

Willst du Brüche und Brüche addieren — die Brüche seien die Brüche der Geometrie, — so schreibe die Brüche der einen Zahl in eine Reihe nach ihrer Abstufung, d. h. wenn sie von erster Ordnung sind, schreibe sie in die letzte Rubrik der Reihe, umgekehrt wie du es bei den ganzen Zahlen machst. Und wenn keine Brüche erster Ordnung da sind, schreibe dort 0 hin, die Brüche zweiter Ordnung schreibst du in die zweite Rubrik nach rückwärts[39]) von der ersten aus, die dritter Ordnung in die dritte Rubrik nach rückwärts von der ersten aus, u. s. w., bis du alle Brüche, die in der einen Zahl vorkommen, niedergeschrieben. So tust du es mit den Brüchen aller Zahlen, du schreibst sie auf diese Weise, einen jeden an seinen Platz. Das ist so, denn die Art der Abstufung der Brüche ist entgegengesetzt der der ganzen Zahlen. Denn bei der Abstufung der Zahlen findet sich nur das eine Ende, nämlich die niedrigste Stufe, bei den Brüchen aber ist es umgekehrt[40]). Denn das Ende, das sich bei ihnen findet, ist die höchste Stufe, daher ist es angebracht, mit ihr zu beginnen,

so dass die Brüche erster Ordnung in der höchsten Stufe stehen müssen, daher ist es natürlich angebracht, dass die Brüche erster Ordnung in der letzten Rubrik der Brüche stehen. Hast du das beendet, so addiere alles, was du an Brüchen der niedrigsten Ordnung in allen Reihen findest, ziehe das, was du mehr als 60 erhältst, davon ab, aus 60 machst du eins in der vorhergehenden Stufe, und was übrig bleibt, schreibe in die betreffende Rubrik in die Reihe des Ergebnisses, und so fort, bis du alle Brüche addiert hast. Und wenn die Addition der Brüche erster Ordnung mehr als 60 oder 60 ergibt, so machst du aus je 60 ein Ganzes in der Reihe des Ergebnisses. Beispiel: Wir wollen 56 Secunden zu 2 Primen, 40 Secunden, 30 Terzen und zu 46 Primen, 27 Secunden und 55 Terzen addieren.

	0	56		
	20	40	30	
	46	27	55	
1	8	4	25	Reihe des Resultats.

Wir schreiben sie in 3 Reihen wie in dieser Figur. Erste Reihe: 0 in der letzten, 56 in der zweiten Rubrik nach rückwärts. Zweite Reihe: 20 in der letzten, 40 in der nächsten Rubrik rückwärts, 30 in der dritten. Dritte Reihe: 46 in der letzten, 27 in der nächsten, 55 in der dritten Rubrik. Und siehe, die Rubrik deren Brüche die kleinsten in diesen Reihen sind, ist die dritte. Wir addieren, was in allen diesen Reihen in der dritten Rubrik steht, das ergibt 85, wir ziehen 60 davon ab, so bleiben 25, schreibe sie in die Reihe des Ergebnisses in die dritte Rubrik, die 60. die wir abgezogen, werden 1 in der zweiten. Addieren wir nun, was in allen Reihen in der zweiten Rubrik ist, und die 1, die uns dort geblieben war, so ergibt sich 124, schreibe 4 in die Reihe des Ergebnisses, die 120 sind 2 in der letzten Rubrik. Addieren wir, was in allen Reihen in der letzten Rubrik ist, und die 2, die uns dort geblieben, so ergibt sich 68, schreibe 8 in die Reihe des Resultats in die letzte Rubrik, die 60 werden ein Ganzes, wir schreiben sie hinter die letzte Rubrik und machen dort einen Strich, zwischen den Ganzen und den Brüchen zu trennen. Das Resultat ist 1 Ganzes, 8 Primen, 4 Secunden, 25 Terzen, richte dich in ähnlichen Fällen danach.

Und wenn unter den Zahlen, die du addieren willst, ganze Zahlen und Brüche sind, so schreibe zuerst die ganzen Zahlen auf die Weise hin, die ich dir gezeigt habe, und mache einen

Strich zwischen der Rubrik der Einer und der Brüche, damit es keine Verwirrung gibt, und schreibe vor die Einer die Brüche erster Ordnung und vor die Primen die Secunden u. s. w., wie oben. Und wenn du das vollendet, beginne die kleinsten Brüche zu addieren, addiere Brüche zu Brüchen und Ganze zu Ganzen, wie wir es erwähnt haben, und schreibe das Resultat in eine besondere Reihe unter diese Reihen an die rechten Stellen.

Ich will dir ein Beispiel geben, wie du eine Reihe schreiben sollst, in der Ganze und Brüche sind, du willst 230 Ganze, 37 Secunden, 44 Quarten, 45 Quinten schreiben. Siehe, die Ganzen werden folgendermassen aussehen, 0 in der ersten, 3 in der zweiten, 2 in der dritten Rubrik. 2 3 0 | 0 37 0 44 45. Mache einen Strich zwischen die erste Rubrik und die Brüche und schreibe hinter den Strich vor die erste Rubrik der Ganzen 0, weil in dieser Zahl keine Primen sind, und in die darauf folgende nach rückwärts schreibe 37, das sind Secunden, in die dritte Rubrik, von ihr rückwärts gerechnet, schreibe 0, weil in dieser Zahl keine Terzen sind, in die vierte nach rückwärts schreibe 44 und in die fünfte nach rückwärts schreibe 45, wie diese Figur. Was die Addition betrifft, so ist sie schon durch das Vorhergehende bekannt.

Wenn du eine Zahl von einer Zahl abziehen willst, schreibe die Zahl, von der du abziehen willst, in eine Reihe nach ihren Abstufungen und darunter in die andere Reihe die Zahl, welche du abziehen wolltest. Dann sieh, welche Stufe die niedrigste in allen Reihen ist, und ziehe von dem, was in der obren Reihe in dieser Stufe steht, das ab, was in der unteren Reihe an entsprechender Stelle ist, den Rest schreibe in die Reihe des Resultats in dieselbe Rubrik. Und wenn nicht genug zum Abziehen da war und du es mit Brüchen zu tun hast, hole eine Einheit der nachher kommenden Rubrik herab, das sind 60 in der vorhergehenden, und dann kannst du abziehen, was du willst. Und so machst du es, bis die ganze untere Reihe von der oberen abgezogen ist. Den Rest schreibst du jedesmal in die Reihe des Resultats an die gehörige Stelle. Und wenn du das zu Ende geführt hast, so ist es klar, dass du die ganze untere Reihe von der oberen abgezogen hast, denn die Teile eines Dinges in ihrer Gesamtheit sind dem ganzen Ding gleich. Nötig ist es, dass in

der Reihe, von der du abziehst, ein Grösseres stehen muss, als in der zweiten Reihe, denn es ist unmöglich das Grössere von dem Kleineren[41]) abzuziehen.

Beispiel: Wir wollen 206 Ganze, 50 Primen, 37 Terzen von 31080 Ganzen, 46 Secunden, 35 Terzen, 47 Quarten, 53 Sexten abziehen.

	0	10	7	9		45				
3	1	0	8	0	0	46	35	47	0	53
		2	0	6	50	0	37			
3	0	8	7	3	9	45	58	47	0	53

Siehe in der niedrigsten Rubrik sind Sexten. In ihr sind in der oberen Reihe 53 Sexten, wir ziehen davon das ab, was ihm in der unteren Reihe entspricht, aber dort ist nichts, deshalb schreibe 53 in die Reihe des Resultats in die Rubrik der Sexten. Dann ziehen wir von der 0, die nach 53 kommt, ab was ihr in der untern Reihe gegenüber steht, aber da ist nichts in der untern Reihe, daher schreibe 0 in die Reihe des Resultats in die Rubrik der Quinten. Dann ziehen wir von 47 das ab, was in der untern Reihe gegenüber steht, aber da ist nichts, daher schreibe in die Reihe des Resultats 47 in die Rubrik der Quarten. Dann ziehen wir von den 35 in der oberen Reihe das ab, was in der untern gegenüber steht, das sind 37, das können wir nicht von 35 abziehen, deshalb nehmen wir eines aus der Rubrik, die nach 35 kommt, es wird in dieser Stufe 60, addiere sie zu 35, so sind es 95, ziehen wir davon 37 ab, so bleiben 58, wir schreiben sie in die Reihe des Resultats in die Rubrik der Terzen. Daher bleiben in der folgenden Rubrik nur 45 übrig. Wir ziehen davon das Entsprechende der untern Reihe ab, aber da ist nichts, also schreibe 45 in die Reihe des Resultats in die Rubrik der Secunden. Es bleibt noch von der 0 das abzuziehen, was in der untern Reihe steht, da steht aber 50, wir können jedoch von 0 nicht 50 abziehen, und auch in der Rubrik der ganzen Zahlen, die daneben steht, ist nichts, was man herunterholen hönnte. Aber in der dritten Rubrik von der fraglichen aus ist eine Zahl, nämlich 8, wir nehmen eines davon weg, und holen es in die vorhergehende Rubrik, schreiben über die 8 eine 7, und die 1, die wir herabgeholt, wird 10 in der ersten Rubrik. Holen wir eines von dieser in die Rubrik der Primen, so bleiben in der ersten 9, das schreiben wir über die 0, und die 1, die wir herabgeholt, wird 60 in der

Rubrik der Primen. Ziehen wir davon 50 ab, so bleiben 10, das schreiben wir in die Reihe des Resultats in die Rubrik der Primen. Nun ziehen wir von 9 ab, was in der untern Reihe steht, das ist 6, es bleiben 3, die wir in die Ergebnisreihe unter die Einer schreiben. Ferner ziehen wir von 7 ab, was entsprechend in der untern Reihe steht, es bleiben 7, weil dort nichts war, das schreiben wir in die Reihe des Resultats zu den Zehnern. Weiter ziehen wir von 0 ab, was entsprechend in der untern Reihe steht, das ist 2, aber wir können 2 nicht von 0 abziehen, in der nebenstehenden Rubrik ist 1, holen wir es herab, so sind es in dieser Rubrik 10, wir schreiben über die 1 eine 0, ziehen von 10 die 2 ab, es bleiben 8, die wir in die Resultatreihe in die Rubrik der Hunderter schreiben. Dann ziehen wir von 0 ab, was entsprechend in der untern Reihe steht, dort ist aber nichts, daher schreiben wir 0 in die Resultatreihe in die vierte Rubrik. Dann ziehen wir von 3 ab, was entsprechend in der untern Reihe steht, dort ist aber nichts, so dass wir 3 in die Reihe des Ergebnisses in die fünfte Rubrik schreiben. Siehe, das Resultat ist 30873 Ganze, 9 Primen, 45 Secunden, 58 Terzen, 47 Quarten, 53 Sexten. Richte dich in ähnlichen Fällen danach.

Manchmal kann es in geometrischen Rechnungen vorkommen, dass du eine grössere Zahl von einer kleineren abziehen musst, und zwar kommt das in der Astronomie vor, dann füge den Wert des Kreisumfangs der gleich 360 ist, zu der kleineren Zahl, von der du abziehen willst, hinzu, und dann kannst du abziehen, was du willst, weil es bei astronomischen Berechnungen keine Zahl gibt, die grösser als 360 ist, denn wenn es vorkommt, dass eine Zahl grösser als 360 wird, so lässt man soviel weg und nimmt nur den Rest[42]). Solche Rechnung kommt bei der landläufigen Neumondsberechnung auch vor, dass man eine grössere Zahl von einer kleineren abziehen muss, dann füge zu der kleineren Zahl 7[43]) Tage hinzu, und du kannst abziehen, was du willst, denn die Berechner des Neumonds, die eine Zahl erhalten, die grösser als 7 Tage ist, lassen die 7 Tage fort und behalten nur den Rest. Richte dich in ähnlichen Fällen danach.

Zweites Kapitel:
Von der Addition gleicher Grössen, d. i. von der Multiplikation einer Zahl mit einer andern.

Du weisst schon, dass, wenn 4 Zahlen in Proportion stehen, d. h., wenn das Verhältnis der ersten zu der zweiten gleich dem Verhältnis der dritten zu der vierten ist, das Produkt aus der ersten in die vierte gleich dem Produkt der zweiten in die dritte ist. Daher ist es klar, dass das Produkt aus der Einheit der zweiten Stufe in die Einheit der vierten gleich der Einheit der fünften Stufe sein muss, denn die Einheit der ersten verhält sich zur Einheit der zweiten, wie die der vierten zu der der fünften Stufe, also ist das Produkt aus der Einheit der ersten in die Einheit der fünften gleich dem Produkt aus der Einheit der zweiten in die der vierten. Die Einheit der ersten Stufe ist aber 1, also ist das Produkt aus der Einheit der zweiten Stufe in die der vierten gleich der Einheit der fünften. Ebenso ist zu beweisen, dass das Produkt aus der Einheit der dritten Stufe in die der vierten, gleich der Einheit der sechsten ist, da die Proportion besteht, nach der das Verhältnis der Einheit der ersten Stufe zu der der dritten, gleich dem Verhältnis der Einheit der vierten zu der der sechsten ist. Und wenn du das fortführst, so wird es dir klar sein, dass die Einheit irgend einer Stufe, die man mit der Einheit irgend einer Stufe multipliziert, die Einheit der Stufe ergibt, deren Abstand von der Einheit des Multiplikanden so weit nach rückwärts[40]) ist, wie der Abstand der Einheit des Multiplikators von der ersten Stufe angibt, das ergibt die um 1 verminderte Summe der Stufen des Multiplikators und des Multiplikanden, weil du die eine der Stufen zweimal zählst. Beispiel dafür: Das Verhältnis der ersten Stufe zur vierten ist gleich dem Verhältnis der fünften zu achten, denn die achte ist die vierte nach der fünften, wenn man die fünfte mitzählt[41]). Nun wird aber die fünfte schon mitgezählt, wenn man ihre Stufen aufrechnet, also wird sie zweimal gezählt, und daher fehlt eine an der Summe der Stufen. Multipliziert man nun irgend eine Zahl von Einheiten einer Stufe mit einer Zahl von Einheiten einer beliebigen Stufe, so ist durch das Bisherige schon gezeigt, dass das Resultat in die Stufe gesetzt werden muss, deren Ab-

stand von der Stufe des Multiplikanden nach rückwärts so gross ist wie der Abstand des Multiplikators von der ersten Stufe. Beispiel: Gesetzt, wir haben 6 Einheiten der dritten Stufe mit 7 der zweiten zu multiplizieren. Klar ist es, dass die Einheit der ersten zu der der dritten sich wie die der zweiten zu der der vierten verhält. Aber 6 Einheiten der ersten verhalten sich zu 6 Einheiten der dritten wie eine Einheit der ersten zu einer Einheit der dritten, weil die Multiplikatoren der Glieder gleich sind, und 7 Einheiten der zweiten verhalten sich zu 7 Einheiten der vierten wie eine Einheit der zweiten zu einer der vierten. Also verhalten sich 6 Einheiten der ersten Stufe zu 6 Einheiten der dritten, wie 7 Einheiten der zweiten zu 7 der vierten, also ist das Produkt aus 6 Einheiten der ersten in 7 Einheiten der vierten gleich dem Produkt aus 6 Einheiten der zweiten in 7 der dritten Stufe. Aber das Produkt aus einer Einheit der ersten in 7 der vierten Stufe gehört zu der vierten, also gehört das Produkt aus 6 Einheiten der ersten in 7 der vierten Stufe zu den Einheiten der vierten, und zwar sind es 6 gleiche Teile von je 7 Einheiten der vierten Stufe. Auf genau dieselbe Weise beweist man, dass bei Multiplikation von „geometrischen Brüchen" das Resultat in die Stufe gehört, deren Abstand nach vorwärts von der Stufe des Multiplikanden so gross ist wie der Abstand des Multiplikators von der der Ganzen, weil auch diese Stufen in Proportion stehen, und daher ist das Resultat der Multiplikation von Zahlen aus einer Stufe der Brüche in eine Zahl aus einer Stufe von Brüchen von der Stufe, deren Zahl gleich der Summe der Stufen des Multiplikators und des Multiplikanden ist. Der Grund dafür liegt darin, dass dort die Zahl der Stufen von der der Einer an gezählt wird, von der sie ausgehen, während der Anfang der Stufen der Brüche von den Primen ausgeht, das ist sehr klar. So geht auch aus dem Gesagten hervor, dass das Resultat der Multiplikation von Einheiten der ersten Stufen und Brüchen irgend einer Stufe zu Brüchen von derselben Stufe führt. Das wollten wir darlegen, es ist hierdurch klar geworden, was wir erklären wollten. Indessen die Multiplikation von Brüchen mit Brüchen oder ganzen Zahlen ist in Wahrheit eine Division, deshalb wollen wir sie in diesem Kapitel nicht behandeln.

Der Weg, den du bei Multiplikation von Zahlen mit Zahlen einschlagen sollst: Es ist angemessen, dass du dir den Multiplikator in eine Reihe, nach seinen Stufen geordnet, aufschreibst, den Multiplikanden in eine Reihe darunter, gleichfalls entsprechend seinen Stufen. Und um es dir zu erleichtern, setze die Zahl, die an Stufen geringer ist, in die erste Reihe, selbst wenn sie an Wert grösser ist, denn es kommt alles auf dasselbe hinaus, d. h. die Reihenfolge der Faktoren ist gleichgültig, das hat Euklid bewiesen. Dann stelle dir unter diesen zwei Reihen so viel Reihen her, wie die Anzahl der Stufen angibt, in denen sich in der ersten Reihe eine Zahl befindet, das sollen die Reihen werden, in die du das Resultat der einzelnen Multiplikationen der Zahlen mit einander schreiben sollst. Nachdem du das getan, multipliziere die erste Zahl der oberen Reihe mit der ersten der untern Reihe, das Resultat setze in die erste der Resultatreihen in die nach dem Vorherigen gehörige Stufe. Und um es dir zu erleichtern, damit du nicht erst berechnen musst, wohin du das Resultat jedesmal setzen sollst, multipliziere mit der ersten Zahl der obern Reihe das, was in der ersten Rubrik der untern Reihe steht, und schreibe das Resultat in die erste Resultatreihe in die Rubrik des Multiplikators. Dann multiplizierst du damit, was in der zweiten Reihe in der zweiten Rubrik steht, und schreibst das Ergebnis in die Rubrik der nächsten Stufe nach der, mit der du begonnen hast, das Resultat einzuschreiben. Und so multipliziere mit der ersten Zahl der oberen Reihe alles, was in den Rubriken der unteren steht, und schreibe das Ergebnis jedesmal in die Rubrik, die auf die Rubrik folgt, in welche du vor dieser Multiplikation eingetragen hast. Dann multipliziere mit der zweiten Zahl der oberen Reihe der Reihe nach alles, was in den Rubriken der unteren steht, und beginne, das Resultat in die zweite Reihe der Resultatreihen in die Rubrik der Multiplikators zu schreiben, daran schliessen sich die Rubriken dieser Resultatreihe der Reihe nach an. Dann multipliziere mit der dritten Zahl der obern Reihe alles, was in den Rubriken der untern steht, der Reihe nach, schreibe das Resultat nach der oben angegebenen Ordnung hin, und so fahre fort, bis alle Zahlen der obern Reihe zu Ende sind.

Dann addiere alle Zahlen der Resultatreihen und schreibe das Resultat in eine Reihe unter die Resultatreihen, das ist das

Produkt der ersten und zweiten Zahl, denn die Gesamtheit der Teile der einen ist mit der Gesamtheit der Teile der andern multipliziert worden.

Beispiel: Wir wollen in diesem Schema mit 7000030 (7000 mal 1000 und 30) 180640 multiplizieren. Siehe, die Zahl, die in ihren Rubriken am wenigsten Zahlen hat, ist 7000030, wir schreiben sie in die obere Reihe an die gehörigen Stellen, die andere Zahl schreiben wir in eine andere Reihe darunter. Siehe: Die erste Zahl der oberen Reihe ist 3 von der zweiten Stufe, wir multiplizieren mit 3 das, was in der ersten Rubrik der unteren Reihe steht, nämlich 0, das gibt 0, wir schreiben sie in die zweite Rubrik der ersten Resultatreihe. Wir multiplizieren mit 3, was in der zweiten Rubrik der untern Reihe steht, nämlich 4, das gibt 12, wir schreiben 2 in die dritte Rubrik der Resultatreihe, die 10 werden 1 in der auf sie folgenden Rubrik. Wir multiplizieren mit 3, was in der dritten Rubrik der zweiten Reihe steht, nämlich 6, das gibt 18, und 1 war uns dort geblieben, das sind 19, wir schreiben 9 in die Resultatreihe hinter 2, und die 10 werden 1 in der folgenden Rubrik. Wir multiplizieren mit 3 das, was in der vierten Rubrik steht, nämlich 0, das gibt 0, und 1 war uns dort geblieben, also haben wir 1, wir schreiben sie in der Resultatreihe hinter die 9. Wir multiplizieren mit 3, was in der fünften Rubrik steht, nämlich 8, das gibt 24, wir schreiben 4 hinter die 1, die 20 werden 2 in der nächsten Rubrik. Wir multiplizieren mit 3, was in der sechsten Rubrik steht, nämlich 1, das gibt 3, 2 waren uns dort geblieben, also haben wir 5, wir schreiben 5 hinter die 4 in die Resultatreihe. Damit ist die Multiplikation von 3 und allem, was in den Rubriken der unteren Reihe stand, beendet.

						7	0	0	0	0	3	0
							3	8	0	6	4	0
						5	4	1	9	2	0	0
1	2	6	4	4	8	0						
1	2	6	4	4	8	5	4	1	9	2	0	0

Wir multiplizieren mit der Zahl, die nach 3 in der oberen Reihe steht, nämlich mit 7, alles was in der unteren Reihe steht. Wir multiplizieren 7 mit 0, das gibt 0, wir setzen sie in die zweite Resultatreihe in die siebte Rubrik, entsprechend der 7,

die in der siebten Rubrik steht. Wir multiplizieren die 7 mit 4, das gibt 28, wir schreiben 8 hinter die 0, die 20 werden 2 in der nächsten Rubrik. Wir multiplizieren 6 mit 7, das gibt 42, und 2 waren uns dort übrig geblieben, das sind 44. Wir schreiben 4 hinter die 8, die 40 werden 4 in der nächsten Rubrik. Wir multiplizieren 0 mit 7, das gibt 0, mit den 4, die uns dort geblieben waren, sind es 4, wir schreiben sie hinter die 4. Wir multiplizieren 8 mit 7, das gibt 56, wir schreiben 6 hinter die 4, die 50 werden 5 in der nächsten Rubrik. Wir multiplizieren 7 mit 1, das gibt 7, 5 waren uns dort geblieben, also sind es 12, wir schreiben 2 hinter die 6, und aus den 10 machen wir 1 der nächsten Rubrik. Damit ist die Multiplikation aller Zahlen der oberen Reihe in alle Zahlen der unteren beendet. Das Resultat ist, 0 in der ersten Rubrik, 0 in der zweiten, 2 in der dritten, 9 in der vierten, 1 in der fünften, 4 in der sechsten, 5 in der siebenten, 8 in der achten, 4 in der neunten, 4 in der zehnten, 6 in der elften, 2 in der zwölften, 1 in der dreizehnten. Richte dich danach.

Und wenn wir wissen wollen, wie gross das Quadrat einer gegebenen Zahl ist, schreiben wir die Zahl, deren Quadrat wir wissen wollen, in eine Reihe, dann schreibe sie noch einmal in eine Reihe unter diese erste und multipliziere mit jeder Zahl der oberen Reihe alles, was in den Rubriken der untern Reihe steht, so erhältst du das gewünschte Resultat.

Und wenn du wissen willst, wie gross die dritte Potenz einer gegebenen Zahl ist, so ist es nötig, dass du zwei Schemata machst. Erst multiplizierst du diese Zahl mit sich selbst, so erhältst du das Quadrat der Zahl, deren dritte Potenz du wissen willst. Dann machst du ein zweites Schema und multiplizierst mit der Zahl, deren dritte Potenz du suchst, ihr Quadrat, das du erhalten hast, das Ergebnis ist das Gesuchte.

Und um es dir leichter zu machen, will ich dir viele Weisen angeben, um durch sie das Produkt zweier Zahlen mit Leichtigkeit zu berechnen. Du weisst schon, dass die Multiplikation einer Zahl der ersten Stufe mit einer Zahl der ersten Stufe eine leichte Sache ist, und ebenso die Multiplikation einer „gebrochenen“ Zahl, damit meine ich die Multiplikation einer Zahl aus der ersten und zweiten Stufe, mit einer Zahl aus der ersten. Wenn du nun eine „gebrochene“ Zahl mit einer „gebrochenen“ zu multiplizieren hast,

so runde die eine der Zahlen nach der nächsten Seite hin ab. Wenn du zu dieser Zahl addiert hast, um sie zu der nächsten Einheit abzurunden, ziehe von der andern Zahl ab, was du zu der ersten hinzugefügt hast, den Rest multipliziere mit der abgerundeten Zahl, die du hast, und merke dir das Ergebnis. Und wenn du von der Zahl abgezogen hast, um eine abgerundete Zahl zu haben, füge zu der andern Zahl hinzu, was du von der ersten Zahl abgezogen, was dir dann bleibt, multipliziere mit der abgerundeten Zahl und merke das Resultat. Dann sieh, um wieviel die grössere Zahl nach der Addition oder Subtraktion die kleinere vor der Einrichtung übertrifft, multipliziere die Differenz mit der Zahl, die du zu einer der Zahlen hinzugefügt hast, das Resultat merke, es ist das zweite Zwischenresultat. Sieh dann, von welcher Zahl du abgezogen hast, hast du von der grösseren abgezogen, so ziehe das zweite Zwischenresultat von dem ersten ab, die Differenz ist das Gesuchte. Und wenn du zu der grösseren Zahl addiert hast, addiere das zweite Zwischenresultat zu dem ersten, so hast du das Gesuchte[42]).

Ich gebe dir einige Beispiele. Wir wollen 34 und 57 multiplizieren. Wir runden 57 auf die nächste Zahl ab, das gibt 60. Da 60 nun 3 mehr ist als 57, ziehen wir 3 von 34 ab und erhalten 31. Wir multiplizieren 60 mit 31, das gibt 1860, das ist das erste Zwischenresultat. Da 60 um 26 mehr ist als 34, multiplizieren wir 26 mit 3, das gibt 78, das ist das zweite Zwischenresultat. Da wir nun zu der grösseren Zahl hinzugefügt haben, addieren wir das zweite Zwischenresultat zum ersten, das gibt 1938, das ist die gesuchte Zahl. Hätten wir in diesem unsern Beispiel 57 nach unten auf 50 abgerundet, so hätten wir 7 zu 34 hinzufügen müssen, das wäre 41. Multiplizieren wir 41 mit 50, so erhalten wir 2050, das ist das erste Zwischenresultat. Da nun 50 um 16 grösser ist als 34, multiplizieren wir 16 mit 7, das ist 112, das ist das zweite Zwischenresultat, und da wir von der grösseren Zahl abgezogen hatten, ziehen wir das zweite Zwischenresultat vom ersten ab, es bleiben 1938, das ist die gesuchte Zahl. Hätten wir in unserem Beispiel 34 nach unten abgerundet, so hätten wir 30 erhalten. Addieren wir 4 zu 57, so gibt das 61, multiplizieren wir 61 mit 30, so gibt das 1830, das ist das erste Zwischenresultat. Siehe nun, die Differenz zwischen 61 und 34

ist 27, multipliziere 27 mit 4, das gibt 108, das ist das zweite Zwischenresultat. Und da du die grössere Zahl vermehrt hast, so addiere das zweite Zwischenresultat zu dem ersten, das sind 1938, das ist die gesuchte Zahl. Hättest du 34 nach oben auf 40 abgerundet, so hättest du 6 von 57 abziehen müssen, das gibt 51. Multipliziere 51 mit 40, so ist das 2040, das ist das erste Zwischenresultat. Siehe, die Differenz zwischen 51 und 34 ist 17, multipliziere sie mit 6, so gibt das 102, das ist das zweite Zwischenresultat, und da du von der grösseren Zahl abgezogen hast, ziehe das zweite Zwischenresultat von dem ersten ab, es bleiben 1938, die gesuchte Zahl.

Manchesmal ergibt sich bei diesem Verfahren, dass du eine Zahl mit sich selbst zu multiplizieren hast, dann wird dir dieser Weg sehr leicht sein. Beispiel: Du hast 43 mit 57 zu multiplizieren. Rundest du 43 auf 50 ab, so hast du 57 um 7 zu vermindern, das gibt 50. Dann hast du 50 mit 50 zu multiplizieren und von dem Ergebnis das Quadrat von 7 abzuziehen, der Rest ist das Gesuchte. Das ist sehr klar nach dem, was wir am Anfang des ersten Abschnittes dieses Buches gesagt haben, beachte es, so wirst du es finden.

Ein andern Weg dafür: Runde die eine Zahl nach der nächsten Seite ab, multipliziere das Ergebnis mit der andern Zahl und merke das Resultat. Multipliziere ferner die andre Zahl mit der Abrundungszahl, merke das Resultat, es ist das zweite Zwischenresultat. Und wenn nun die Abrundung durch Addition geschah, so ziehe das zweite Zwischenresultat von dem ersten ab, der Rest ist das Gesuchte. War aber die Abrundung durch Subtraktion vorgenommen, so addiere das zweite Zwischenresultat zum ersten, das Ergebnis ist das Gesuchte. Anwendung auf unser voriges Beispiel: Wir runden 57 nach der nächsten Seite ab, das ist 60, multiplizieren 60 mit 34, das sind 2040, das ist das erste Zwischenresultat. Die Abrundungszahl war 3, wir multiplizieren 34 mit 3, das gibt 102, das ist das zweite Zwischenresultat. Da die Abrundung durch Addition geschehen war, ziehen wir das zweite Zwischenresultat vom ersten ab, es bleiben 1938, das ist das Gesuchte. Hätten wir in unserm Beispiel 34 nach der nächsten Seite abgerundet so wären es 30. Multiplizieren wir 30 mit 57, so erhalten wir 1710, das ist das erste Zwischenresul-

tat. Die Abrundungszahl ist nun 4, multiplizieren wir 57 mit 4, so ist das 228, das ist das zweite Zwischenresultat. Und da die Abrundung durch Subtraktion geschah, addieren wir das zweite Zwischenresultat zum ersten, das gibt 1938, das ist das Gesuchte.

Wenn wir das Quadrat einer gegebenen „gebrochenen“ Zahl wissen wollen, so runden wir die Zahl nach der nächsten Seite ab, und ziehen die Abrundungszahl von der gegebenen ab, den Rest multiplizieren wir mit der abgerundeten Zahl und addieren zu dem Resultat das Quadrat der Abrundungszahl, das ist das Gesuchte. Beispiel: Du willst das Quadrat von 47 wissen. Die nächste runde Zahl ist 50, ihr Abstand von 47 ist 3, ziehe das von 47 ab, so sind das 44, multipliziere 44 mit 50, das sind 2200, siehe die Entfernung war 3, das gibt 9, also haben wir 2009, das ist das Gesuchte.

Ein andrer Weg, um mit Leichtigkeit das Quadrat einer Zahl von irgend einer Stufe zu finden: Sieh das Verhältnis dieser Zahl zu der Einheit der nächsten Stufe. Nimm den durch dieses Verhältnis bestimmten Teil der Zahl, deren Quadrat du suchst, und multipliziere ihn mit der Einheit der nächsten Stufe, das ist das Gesuchte. Beispiel: Du willst das Quadrat von 30 wissen. Siehe das Verhältnis von 30 zu 100, der Einheit der nächsten Stufe, ist $^3/_{10}$. Nimm $^3/_{10}$ von 30, das ist 9, multipliziere es mit 100, das ist 900, das ist das Gesuchte. Das ist so, weil 30 die mittlere Proportionale zwischen 9 und 100 ist.

Und wenn die Zahl, deren Quadrat du wissen willst, aus 2 Stufen ist, die auf einander folgen, runde die Zahl nach der nächsten Seite ab, suche ihr Quadrat und merke das Resultat. Dann addiere die abgerundete Zahl zu der gebrochenen und multipliziere sie mit der Abrundungszahl, das ist das zweite Zwischenresultat. Und wenn die Abrundung durch Addition geschah, ziehe das zweite Zwischenresultat vom ersten ab, wenn die Abrundung durch Addition geschah, addiere das zweite Zwischenresultat zum ersten, das Ergebnis ist das Gesuchte. Beispiel: Du willst das Quadrat von 33 wissen. Runde die Zahl nach der nächsten Seite auf 30 ab, das Qnadrat von 30 ist 900, merke es. Dann addiere 33 und 30, das ist 63, multipliziere es mit 3, der Abrundungszahl, das gibt 189, das ist das zweite Zwischenresultat. Da die

Abrundung durch Subtraktion geschah, addiere 189 zu dem ersten Zwischenresultat, das gibt 1089, das ist das Gesuchte. Hättest du 33 auf 40 in unserm Beispiel abgerundet, so wäre das Quadrat 1600 gewesen, merke es. Addiere 33 und 40, das gibt 73, und multipliziere mit 7, das gibt 511. Und da die Abrundung durch Addition geschah, ziehe 511 von dem ersten Zwischenresultat ab, es bleiben 1089, das ist das Gesuchte. Das ist so, weil die Differenz zwischen dem Quadrat von 40 und dem Quadrat von 33 gleich der Summe der Produkt 7 . 40 und 7 . 33 ist, das ist aber gleich 7 . 73, richte dich in ähnlichen Fällen danach!

[43]) Ein andrer Weg: Nimm ein Drittel der Zahl, deren Quadrat du suchst, suche das Quadrat davon und merke es. Setze es in die nächsthöhere Stufe und ziehe von dem Resultat das Zwischenresultat ab, so ist der Rest das Gesuchte. Beispiel: Wir wollen das Quadrat von 33 wissen, wir nehmen ein Drittel davon, das ist 11, sein Quadrat ist 121, wir setzen das in die nächsthöhere Stufe, das gibt 1210, wir ziehen davon 121 ab, es bleiben 1089, das ist das Gesuchte. Das ist so, denn 1210 ist 10 mal 121. Und siehe, das Verhältnis des Quadrats von 33 zu dem Quadrat von 11 ist das Verhältnis der Seite des einen Quadrats zu der der andern, mit sich selbst multipliziert. Aber das Verhältnis der Seite zu der Seite, mit sich selbst multipliziert, ist gleich dem Verhältnis von 9 zu 1, also ist das Quadrat von 33 gleich 9 mal dem Quadrat von 11. Nun war 1210 gleich dem 10 mal genommenen Quadrat von 11; wenn wir also von 1210 das Quadrat von 11 abziehen, so ist der Rest gleich dem Quadrat von 33. Richte dich in ähnlichen Fällen danach!

Drittes Kapitel:
Von der Addition arithmetischer und geometrischer Reihen.

Wenn du eine natürliche Zahlenreihe, die bei 1 beginnt und sich bis zu einer gegebenen Zahl erstreckt, addieren willst, nimm die Hälfte des Quadrats der gegebenen Zahl und addiere dazu die Hälfte der Zahl, so ist das das Gesuchte. Beispiel: Du willst 1, 2, 3, 4 u. s. w. bis 10, 10 eingeschlossen, addieren, nimm die Hälfte des Quadrats von 10 und die Hälfte von 10, das ist 55, das ist das Gesuchte.

Ein andrer Weg: Multipliziere mit dieser Zahl die Hälfte der folgenden, das ist das Gesuchte. In diesem unsern Beispiele multipliziere 10 und die Hälfte von 11 oder 11 und die Hälfte von 10, das gibt 55, das war das Gesuchte.

Und wenn die Zahlen keine natürliche Reihe bilden, ich meine, die erste ist eine gegebene Zahl, die zweite zweimal die gegebene Zahl, die dritte dreimal u. s. w. bis zu einer gegebenen Anzahl von Malen, so bilde die Summe der natürlichen Zahlenreihe bis zu der gegebenen Zahl auf die vorhergenannte Art und multipliziere das Resultat mit der gegebenen ersten Zahl, das ist das Gesuchte. Beispiel dafür: die erste Zahl sei 7, die zweite 14, die dritte 21, die vierte 28, und auf diese Weise sollen Zahlen auf einander folgen bis zur neunten, so weisst du schon, dass die Summe der Zahlen von 1 bis 9 gleich 45 ist, multipliziere das mit 7, der ersten Zahl, so gibt das 315, das ist das Gesuchte. Das ist so, weil das Verhältnis von 1 zu der ersten Zahl gleich dem von 2 zu der zweiten und dem von 3 zu der dritten, dem von 4 zu der vierten, dem von 5 zu der fünften, dem von 6 zu der sechsten, dem von 7 zu der siebten, dem von 8 zu der achten und dem von 9 zu der neunten ist, aber das Verhältnis von 1 zu seinem Hinterglied ist gleich dem Verhältnis der Summe der Vorderglieder zu der Summe der Hinterglieder, also verhält sich 1 zu 7, wie die Summe aller Vorderglieder zu der aller Hinterglieder. Nun enthält 7 die 1 siebenmal als Faktor, also enthält die Summe dieser Zahlen 45 auch siebenmal, also multipliziere man 7 und 45, das Resultat ist gleich der Summe dieser Zahlen. Richte dich in ähnlichen Fällen danach!

Willst du die ungraden Zahlen von 1 bis zu einer gegebenen Zahl addieren, so nimm das Quadrat der mittleren Zahl zwischen 1 und der gegebenen Zahl, so hast du das Gesuchte. Beispiel dafür: Du willst die ungraden Zahlen von 1 bis 9, 1 mitgerechnet, addieren. Die Zahl in der Mitte zwischen 1 und 9 ist 5, nimm ihr Quadrat, das ist 25, so hast du das Gesuchte. Willst du die graden Zahlen bis zu einer bestimmten Zahl addieren, so ist die erste Zahl 2, die zweite zweimal 2, die dritte dreimal 2, und so reihen sich Zahlen an einander, die nicht der natürlichen Reihe entsprechen, dafür weisst du aber den Gang schon. Darum nimm die Hälfte der letzten Zahl, weil sie gleich der An-

zahl der zu addierenden graden Zahlen ist, dann weisst du, was die Summe der natürlichen Zahlenreihe von 1 bis zu ihr ist, multipliziere das Resultat mit 2, der ersten Zahl, so hast du das Gesuchte. Beispiel dafür: du willst die graden Zahlen bis 10 addieren. Du weisst schon, dass die Summe der Zahlen bis 5 gleich 15 ist, multipliziere das mit 2, der ersten Zahl, so gibt das 30, das ist das Gewünschte.

[44]) Wenn du die Quadrate einer natürlichen Zahlenreihe von 1 bis zu einer gegebenen Zahl addieren willst, so nimm die gegebene Zahl weniger ein drittel der ihr vorangehenden und multipliziere damit die Summe der Zahlen von 1 bis zu der gegebenen. Beispiel dafür: Du willst die Summe der Quadrate der Zahlenreihe von 1 bis 5 wissen. Siehe, die Zahl von 5 ist 4, ziehen wir von jener ein Drittel von 4, das ist $^4/_3$ ab, so bleiben 4 wenige $^1/_3$, multiplizieren wir damit 15, die Summe der Zahlen von 1 bis 5, so gibt das 55, das ist das Gesuchte.

Wenn du die Quadrate der ungraden Zahlen der natürlichen Reihe von 1 an oder die Quadrate der graden Zahlen bis zu einer gegebenen Zahl addieren willst, d. h., die gegebene Zahl soll die letzte sein, so nimm die Summe der Zahlen der natürlichen Reihe bis zu der auf die gegebene folgenden Zahl und multipliziere sie mit $^1/_3$ der gegebenen Zahl. Beispiel· dafür: Wir wollen die Summe der Quadrate der ungraden Zahlen bis 9 finden. Die Summe der Zahlenreihe bis 10 ist 55, wir multiplizieren damit den dritten Teil von 9, das gibt 165, das ist das Gesuchte.

Und wenn du die Quadrate einer gegebenen Anzahl von Zahlen einer nicht natürlichen Reihe multiplizieren willst, multipliziere die Summe der Quadrate der natürlichen Reihe bis zu der gegebenen Zahl mit dem Quadrat der ersten Zahl, das Ergebnis ist das Gesuchte. Beispiel dafür: Du willst die Quadrate einer Zahlenreihe addieren, deren erste Zahl 4, deren zweite 8, deren dritte 12 ist, und so sollen sich auf diese Weise 7 Zahlen folgen. Siehe, du weisst schon, dass die Summe der Quadrate aller Zahlen bis 7 gleich 140 ist, multipliziere damit 16, das Quadrat der ersten Zahl, so ergibt das 2240, das ist das Gewünschte. Das ist so, weil das Verhältnis von 1 zu der ersten Zahl gleich dem von 2 zu der zweiten und gleich dem einer

jeden Zahl zu der entsprechenden ist, also ist das Verhältnis des Quadrats von 1 zu dem Quadrat der ersten Zahl gleich dem des Quadrats einer jeden Zahl zu dem Quadrat der entsprechenden, und daher ist das Verhältnis des Quadrats von 1 zu dem Quadrat der ersten Zahl gleich dem Verhältnis der ganzen ersten Summe zu der ganzen zweiten.

[45]) Wenn du die dritten Potenzen der Zahlen einer natürlichen Reihe bis zu einer gegebenen Zahl addieren willst, so nimm das Quadrat der Summe der Zahlen von 1 bis zu der gegebenen, das ist das Gewünschte. Beispiel dafür: Du willst die Summe der dritten Potenzen der Zahlen von 1 bis zu 6 wissen. Siehe, die Summe der Zahlen von 1 bis 6 ist 21, wir nehmen das Quadrat, das gleich 441 ist, das ist das Gesuchte. Und wenn die Zahlen nicht eine natürliche Reihe bildeten und es eine gegebene Anzahl ist, von der wir die Summe der dritten Potenzen wissen wollen, so suche die Summe der dritten Potenzen der Zahlen der natürlichen Reihe von 1 bis zu der gegebenen Zahl und multipliziere damit die dritte Potenz der ersten Zahl, das ist das Gewünschte. Die Ursache dafür ist schon im Vorhergehenden gezeigt. Beispiel dafür: Es sei die erste Zahl 4, die zweite 8, und es mögen nach diesem Gesetz 5 Zahlen auf einander folgen. Wir wissen schon, dass die Summe der dritten Potenzen der natürlichen Zahlenreihe bis 5 gleich 225 ist. Wir multiplizieren damit 64, die dritte Potenz der ersten Zahl, das Ergebnis ist 14400, das ist das Gewünschte.

Und wenn wir die Summe der dritten Potenzen der graden Zahlen aus einer bei 1 beginnenden und bis zu einer gegebenen Zahl sich erstreckenden Reihe wissen wollen, so nimm die Summe der dritten Potenzen der Zahlen aus der Reihe bis zur Hälfte der gegebenen Zahl und multipliziere mit dem Ergebnis die dritte Potenz der ersten Zahl, die gleich 2 und deren dritte Potenz 8 ist, das ist das Gewünschte. Im Vorigen ist der Grund hierfür schon auseinander gesetzt, d. h. diese Zahlen lassen sich auf Reihen, die nicht der natürlichen Reihe entsprechen zurückführen. Beispiel dafür: Du willst die Summe der dritten Potenzen der graden Zahlen aus der Reihe bis 6 wissen. Siehe, die Summe der dritten Potenzen der Zahlen bis 3 ist 36, multipliziere damit 8, die dritte Potenz von 2, so ist das 288, das ist das Gewünschte.

Daraus kannst du auch die Summe der dritten Potenzen der ungraden Zahlen der Reihe von 1 bis zu einer gegebenen Zahl finden, ich meine, du suchst zuerst die Summe der dritten Potenzen aller Zahlen bis zu der gegebenen und ziehst von dem Resultat die Summe der dritten Potenzen der graden Zahlen ab, der Rest ist die Summe der dritten Potenzen der ungraden.

Wenn wir die Zahlen einer natürlichen Zahlenfolge, die nicht bei 1 sondern bei einer gegebenen Zahl beginnt, und die bei einer zweiten gegebenen Zahl endet, wissen wollen, so nehmen wir die Summe der Zahlen bis zu der zweiten gegebenen, merken sie und ziehen von dem Zwischenresultat die Summe der Zahlen von 1 bis zu der Zahl vor der ersten gegebenen ab. Beispiel dafür: Die erste Zahl sei 6, wir wollen die folgenden Zahlen bis 11 addieren. Die Summe der Zahlen bis 11 ist 66, wir ziehen davon die Summe der Zahlen von 1 bis 5 ab, das ist 15, es bleiben 51, das ist das Gewünschte. Und so machst du es mit der Summe der Quadrate einer Zahlenreihe, die nicht bei 1 beginnt, oder bei der Summe der dritten Potenzen, die Ursache dafür ist klar. Und so machst du es mit der Summe der Quadrate einer Reihe von ungraden Zahlen, wenn sie nicht bei 1 beginnen, oder bei der Summe von Quadraten von graden Zahlen wenn sie nicht bei 2 beginnen, aus eben diesem Grunde.

Wenn du eine gegebene Anzahl von Zahlen addieren willst, die eine nicht natürliche Reihe bilden, und bei denen die erste nicht gleich der „Abstandszahl“ (Differenz) ist[46]), sondern um eine gegebene zweite Zahl kleiner oder grösser als dieselbe, so multipliziere die zweite gegebene Zahl mit der ersten gegebenen, das Ergebnis ist das erste Zwischenresultat. Nimm auch die Summe der Zahlen der natürlichen Zahlenreihe bis zu der ersten gegebenen Zahl und multipliziere damit die Differenz, das ist das zweite Zwischenresultat. Und wenn das Anfangsglied kleiner war als die Differenz, so ziehe das erste von dem zweiten Zwischenresultat ab, der Rest ist das Gewünschte. Beispiel dafür: Du willst 7 Zahlen addieren, deren jede 3 grösser ist als die vorhergehende, das erste Glied ist um 2 grösser oder kleiner als 3. Siehe, das Produkt 2 . 7 ist gleich 14, das ist das erste Zwischenresultat. Die Summe der Zahlen der Reihe von 1 bis 7 ist 28, wir multiplizieren sie mit 3, das gibt 84. Wenn nun das

Anfangsglied 2 kleiner war als 3, so ziehe 14 von 84 ab, es bleiben 70, das ist das Gewünschte. Der Grund liegt darin, dass, wenn wir die Differenz zwischen 3 und dem Anfangsglied zu jeder der Zahlen der Reihe hinzugefügt hätten, so hätten wir eine nicht natürliche Zahlenreihe gehabt, deshalb müssen wir von dem Resultat das Produkt 7 . 2 abziehen.

Und wenn das Anfangsglied um 2 grösser als 3 ist, so addiere 14 zu 84, das gibt 98, das ist das Gewünschte. Der Grund liegt darin, dass wir eine nicht natürliche Reihe gehabt hätten, wenn wir von jeder der Zahlen die Differenz zwischen dem Anfangsglied und 3 abgezogen hätten. Richte dich in ähnlichen Fällen danach.

Wenn du die Quadrate einer gegebenen Anzahl von Gliedern einer allgemeinen arithmetischen Reihe addieren willst, bei der das Anfangsglied sich um eine gewisse Grösse von der Differenz unterscheidet, so multipliziere die zweite gegebene Zahl mit der doppelten Summe dieser Zahlen und das Ergebnis addiere zu dem Produkt der ersten gegebenen Zahl in das Quadrat der zweiten gegebenen, wenn das Anfangsglied kleiner als die Differenz war, und wenn das Anfangsglied grösser als die Differenz war, so ziehe dieses erwähnte Produkt ab, das Resultat der Addition oder Subtraktion ist das erste Zwischenresultat. Dann addiere die Quadrate der natürlichen Zahlenreihe von 1 bis zu der ersten gegebenen Zahl und multipliziere mit dem Ergebnis das Quadrat der Differenz, das ist das zweite Zwischenresultat. War das Anfangsglied kleiner als die Differenz, so ziehe das erste Zwischenresultat vom zweiten ab, der Rest ist das Gewünschte. Und war das Anfangsglied grösser als die zweite gegebene Zahl, so addiere das erste und zweite Zwischenresultat, das Ergebnis ist das Gewünschte[46]). Beispiel dafür: Du willst die Quadrate von 7 Zahlen addieren, bei denen jede folgende um 3 grösser ist als die vorhergehende, die erste ist um 2 grösser oder kleiner als 3. Sei das Anfangsglied zunächst um 2 grösser als 3. Siehe, wir wissen, dass die Summe dieser Zahlen 98 ist, verdoppele sie, so ist das 196, wir multiplizieren das mit 2, das gibt 392. Aber das Produkt aus dem Quadrat von 2, das gleich 4 ist, und 7 ist 28, wir ziehen es von 332 ab, das gibt 364, das ist das erste Zwischenresultat.

Oder wenn du mit 2 die doppelte Summe von 7 Zahlen, die eine nicht natürliche Reihe bilden, deren jede die Vorhergehende um 3 übertrifft und deren erste 3 ist, multiplizieren würdest und zu dem Resultat das Produkt aus dem Quadrat von 2 und 7 addiertest, so würde auch 364 herauskommen. Denn 2 . 2 . 84 ist gleich 336. Addieren wir dazu 4 . 7, das gleich 28 ist, so erhalten wir auch 364. Siehe, die beiden Wege bringen dich zu einer Zahl, das geht ganz klar bei nur geringem Nachdenken aus dem Anfang des ersten Abschnitts hervor[47]).

Aber die Summe der Quadrate der Zahlenreihe von 1 bis 7 ist gleich 140, multipliziere damit 9, das Quadrat der Differenz, das gibt 1260, addiere das zu 364, so ergibt sich 1624, das ist das Gewünschte. Sei nun das Anfangsglied um 2 kleiner als 3 in diesem unsern Beispiel, siehe, so wissen wir, dass die Summe der Zahlen 70 ist, verdoppeln wir sie, so gibt das 140, multiplizieren wir mit 2, so ist das 280. Aber das Produkt aus 7 und dem Quadrat von 2 ist 28, addieren wir das, so haben wir 308, das erste Zwischenresultat. Aber die Summe der Quadrate der Zahlenreihe bis 7 ist 140, multiplizieren wir damit 9, das Quadrat der Differenz, so erhalten wir 1260, davon ziehen wir 308 ab, das gibt 952, das ist das Gewünschte. Das ist so, weil die Zahlen, wenn man 2 zu jeder von ihnen hinzufügt, eine nicht natürliche Reihe bilden, die Differenz zwischen dem Quadrat einer jeden um 2 vermehrten, Zahl und dem Quadrat der Zahl ist aber zweimal das Doppelte dieser Zahl, vermehrt um das Quadrat von 2, addiert man alle diese Differenzen, so ergibt das das doppelte Produkt aus 2 in die Summe dieser Zahlen, vermehrt um das Produkt aus dem Quadrat von 2 in die Anzahl dieser Zahlen. Zieht man dieses Resultat von der Summe der Quadrate der Glieder einer nicht natürlichen Reihe mit der gegebenen Differenz und so viel Gliedern, wie die gegebene Zahl angibt, ab, so bleibt das gesuchte Resultat. So beweist man das für den entsprechenden Fall mit geringem Nachdenken, suche es zu verstehen, so wirst du es finden[48]).

Wenn du die dritten Potenzen einer gegebenen Anzahl von Gliedern einer allgemeinen arithmetischen Reihe addieren willst, deren Differenz sich um eine gegebene zweite Zahl von dem Anfangsglied unterscheidet, so nimm, wenn das Anfangsglied kleiner ist als die

Differenz, die Summe der Quadrate dieser Zahlen, multipliziere das Resultat mit dem dreifachen der zweiten gegebenen Zahl und merke das Ergebnis, dann multipliziere das Dreifache des Quadrats der zweiten gegebenen Zahl mit der Summe der Zahlen und merke das Resultat. Dann multipliziere die dritte Potenz der zweiten gegebenen Zahl mit der ersten Zahl und addiere das Ergebnis zu den zwei früher gemerkten Zwischenresultaten, so hast du das erste fertige Zwischenresultat. Dann bilde die Summe der dritten Potenzen einer natürlichen Reihe 1 bis zu der gegebenen ersten Zahl und multipliziere damit die dritte Potenz der Differenz und ziehe davon das erste fertige Zwischenresultat ab, so bleibt dir das Gewünschte. Beispiel dafür: Wir wollen die Summe der dritten Potenzen von 7 Zahlen bilden, deren jede die vorhergehende um 3 übertrifft, während das Anfangsglied um 2 kleiner ist als 3. Wir wissen schon, dass die Summe der Quadrate aller dieser Zahlen 952 ist, multiplizieren wir das mit 3 . 2, das gleich 6 ist, so gibt das 5712, wir merken diese Zahl. Und ferner ist die Summe dieser Zahlen 70, wir multiplizieren sie mit dem dreifachen Quadrat von 2, das ist 12, das ergibt 840, auch das merken wir. Dann multiplizieren wir die dritte Potenz von 2, also 8, mit 7, das ist 56. Addieren wir das und die beiden ersten Zwischenresultate, so ergibt das 6608, das ist das fertige erste Zwischenresultat. Bilden wir nun die Summe der dritten Potenzen der Zahlen von 1 bis 7, so ist das 784, multiplizieren wir das mit 27, der dritten Potenz von 3, so haben wir 21168, davon ziehen wir das erste fertige Zwischenresultat ab, so bleiben 14560, das ist das Gewünschte. Und wenn das Anfangsglied grösser war als die Differenz, so bilde die Summe von soviel Gliedern einer nicht natürlichen Reihe, deren Differenz gleich der gegebenen ist, wie die erste gegebene Zahl angibt — du weisst durch das Vorherige die Weise des Vorgehens —, multipliziere mit dem Resultat das dreifache Quadrat der zweiten gegebenen Zahl und merke das Ergebnis. Dann bilde die Summe der Quadrate von soviel Gliedern einer nicht natürlichen Reihe mit der gegebenen Differenz, wie die erste gegebene Zahl besagt, und multipliziere mit dem Ergebnis das Dreifache der zweiten gegebenen Zahl und merke das Resultat. Endlich bilde die dritte Potenz der gegebenen zweiten Zahl, multipliziere die erste Zahl mit ihr

und addiere das Ergebnis zu den beiden ersten Zwischenresultaten, das ergibt das erste fertige Zwischenresultat. Dann bilde die Summe der dritten Potenzen von soviel Gliedern einer nicht natürlichen Reihe mit der gegebenen Differenz, wie die erste gegebene Zahl besagt, und addiere das erste fertige Zwischenresultat zu dem Ergebnis, so ist das das Gesuchte.

Beispiel dafür: aus unserm vorigen Beispiel: d. h. das Anfangsglied soll um 2 grösser sein als die Differenz. Siehe, wir wissen, dass die Summe der Quadrate von 7 Gliedern einer nicht natürlichen Reihe mit der Differenz 3 gleich 1260 ist. Wir multiplizieren 1260 mit dem dreifachen der 2ten gegebenen Zahl, also mit 6, das gibt 7560, und wir merken diese Zahl. Ferner ist die Summe von 7 solchen Zahlen mit der Differenz 3 gleich 84, wir multiplizieren das mit dem dreifachen Quadrat der gegebenen zweiten Zahl, also mit 12, und erhalten 1008, die wir merken. Die dritte Potenz der gegebenen zweiten Zahl ist nun 8, wir multiplizieren sie mit der ersten Zahl, also mit 7, das gibt 56. Wir addieren das zu den zwei gemerkten Zahlen, das gibt 8514, das ist das erste fertige Zwischenresultat. Nun ist die Summe der dritten Potenzen von 7 Gliedern einer nicht natürlichen Reihe mit der Differenz 3 gleich 21168, wir addieren sie zu dem ersten fertigen Zwischenresultat und erhalten 29792, das ist das Gewünschte. Das ist so, denn wenn wir von jeder dieser Zahlen 2 abziehen, so bilden sie eine nicht natürliche Reihe mit der Differenz 3. Die dritte Potenz jedes Gliedes ist aber um das dreifache Produkt aus dem Quadrat der Zahl und 2, vermehrt um das dreifache Produkt aus der Zahl und dem Quadrat von 2 und um die dritte Potenz von 2, kleiner als die dritte Potenz des entsprechenden vermehrten Gliedes. Addiert man das bei allen Gliedern, so ergibt es das, was wir erwähnt haben, beachte es, und du wirst es finden; und so zeigt man den Grund in dem entsprechenden andern Fall mit geringem Nachdenken.

Wenn du wissen willst, wie gross die letzte Zahl einer gegebenen Anzahl von Gliedern in einer nach einem gegebenen Verhältnis fortschreitenden geometrischen Reihe ist, so suche das Quadrat der gegebenen Verhältniszahl[49]), dann hast du das dritte Glied, suche das Quadrat der dritten, so hast du das fünfte, das Quadrat des fünften, so hast du das neunte, auf diese Weise

kannst du durch das Quadrat jedes Gliedes das Glied finden, das von ihm denselben Abstand hat, wie es von dem ersten. Und wenn du zu einem Glied kommst, das dem gegebenen Glied näher ist, so merke es dir, dann suche seinen Abstand von dem gegebenen Glied, sieh auch, wie gross das Glied der geometrischen Reihe ist, das ebenso weit von der 1 absteht, und mit dieser Zahl multipliziere das Gemerkte, so hast du das Gewünschte. Beispiel dafür: du willst wissen, wie gross das letzte Glied von 5 Zahlen einer mit gegebenen Exponenten fortschreitenden geometrischen Reihe ist, die bei 1 beginnt. Der gegebene Exponent sei 3, demnach ist das zweite Glied 3, wir nehmen das Quadrat von 3, also 9, das ist das dritte Glied, wir nehmen das Quadrat von 81, also 6561, das ist das neunte. Und wenn wir das Quadrat des neunten nähmen, so bekämen wir das siebzehnte, und wir wären über die gegebene Zahl hinausgekommen, deshalb sehen wir, wie gross der Abstand des fünfzehnten von dem neunten ist, und siehe, das fünfzehnte ist das siebte nach ihm. Deshalb müssen wir sehen, wie gross das siebte Glied ist, wenn wir vom ersten anfangen. Wir wissen, dass das fünfte Glied, vom ersten an gerechnet, 81 war, das siebte ist das dritte, vom fünften an gerechnet, wir multiplizieren 81 und 9, das dritte Glied, und erhalten 729 als das siebte Glied. Multipliziere das siebte mit dem neunten, so hast du das fünfzehnte, es ist 4782969 (viertausend mal tausend und siebenhundertzweiundachtzigtausend und 969), das ist das fünfzehnte, richte dich in ähnlichen Fällen danach.

Das ist so, weil das Verhältnis des ersten zum zweiten wie das des zweiten zum dritten und daher das Produkt aus dem ersten und dritten gleich dem Produkt aus dem zweiten in sich selbst ist. Aber das Produkt aus dem ersten und dritten ist das dritte, weil das erste 1 ist, also ist das Produkt des zweiten in sich selbst das dritte. Ebenso beweist man, dass das Produkt des ersten und fünften gleich dem Produkt des dritten in sich selbst ist, und so auch für das, was folgt. Ferner ist das Verhältnis des ersten zum dritten gleich dem des fünften zum siebten, also ist das Produkt des dritten und fünften gleich dem Produkt des ersten und siebten, das ist gleich dem siebten. Ferner ist das Verhältnis des ersten zum siebten gleich dem des neunten zum fünfzehnten, also ist das Produkt des siebten und neunten

gleich dem Produkt der ersten und fünfzehnten, das ist gleich dem fünfzehnten. Richte dich in ähnlichen Fällen danach.

Und wenn du wissen willst, wie gross das letzte Glied einer gegebenen Zahl von Gliedern einer nicht mit 1 beginnenden geometrischen Reihe mit gegebenen Exponenten ist, suche zuerst, wie gross das gegebene Glied in einer mit 1 beginnenden Reihe mit demselben Exponenten ist, und multipliziere das mit dem ersten Glied, das ist das Gewünschte. Beispiel dafür: Die Anzahl der Glieder der geometrischen Reihe seien 5, der Exponent 3, das Anfangsglied 5, und du willst wissen, wie gross das letzte ist. Siehe, wir wissen schon, dass das fünfte Glied einer bei 1 beginnenden geometrischen Reihe mit diesem Exponenten gleich 81 ist, multipliziere 81 mit der ersten Zahl, also mit 5, das gibt 405, das ist das Gewünschte. Das ist so, denn die Proportion besteht, nach der das erste (der einen Reihe), das gleich 1 ist, sich zu dem fünften, von ihm aus gerechnet, so verhält wie das erste (der andern Reihe), das gleich 5 ist, zu dem fünften, von ihm aus gerechnet. Und vertauschen wir die inneren Glieder, so verhält sich das erste zu dem (andern) ersten, wie das fünfte zu dem (andern) fünften. Aber das Verhältnis des ersten zu dem (andern) ersten ist 1 zu 5, also ist das Verhältnis des fünften zu dem (andern) fünften auch 1 zu 5. Richte dich in ähnlichen Fällen danach.

Willst du eine gegebene Zahl von Gliedern einer geometrischen Reihe mit gegebenen Exponenten addieren, so ziehe das erste von dem zweiten ab und sieh, wie sich der von dem zweiten übrig gebliebenen Rest zum ersten verhält, so verhält sich die Differenz des letzten und ersten zur Summe aller Zahlenreihen, das ist schon am Schluss des 9ten Buchs von Euklid bewiesen[50]).

Beispiel dafür: Du willst 6 Glieder einer geometrischen Reihe mit dem Exponenten 3 und dem Anfangsglied 4 addieren. Du weisst, dass das zweite 12 und das letzte 972 ist. Wir ziehen das erste, also 4, vom zweiten ab, es bleiben 8, und das Verhältnis von 4 zu 8 ist $^1/_2$. Wir ziehen 4 vom letzten ab, es bleiben 968, wir nehmen die Hälfte davon, das ist 484, addieren es zu 972, das gibt 1456, das ist das Gewünschte.

Viertes Kapitel:
Von der Combinatorik gegebener Elemente, sei es dass die Complexionen sich durch die Elemente oder durch die Ordnung oder durch beide zusammen unterscheiden.

Wenn du die Permutationszahl einer gegebenen Anzahl verschiedener Elemente wissen willst, bilde die Zahl, die sich aus den Zahlen der natürlichen Reihe von 1 bis zu der gegebenen Zahl zusammensetzt, das ist das Gewünschte. Beispiel dafür: Du willst wissen, auf wieviel Weisen sich 5 Elemente zusammenstellen lassen, so dass sich die Complexionen nur durch die Ordnung unterscheiden. Siehe, die Zahlen von 1 bis 5 sind 1, 2, 3, 4, 5, und die Zahl, die aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 zusammengesetzt ist, ist 120, das ist das Gesuchte. Das ist so, weil die Anzahl der Complexionen bei 2 Elementen gleich 2 ist, und das ist gleich 1 . 2. Die Anzahl der Complexionen bei 3 Elementen ist 3 . 2, das ist gleich 1 . 2 . 3, und so beweist man das bis ins Unendliche.

Willst du die Anzahl der Variationen einer durch eine zweite gegebene Zahl bestimmten Klasse von einer durch eine gegebene erste Zahl ausgedrückten Menge von verschiedenen Elementen wissen, so weisst du schon, dass die Variationen der zweiten Klasse gleich dem Produkt aus der ersten gegebenen Zahl in die ihr vorangehende sind, und dass die Variationszahl der dritten Klasse sich zu der der zweiten verhält, wie die Differenz zwischen der ersten Zahl und 2 zu 1, dass ferner die Variationszahl der vierten Klasse sich zu der der dritten wie die Differenz der ersten Zahl und 3 zu 1 verhält, und so geht es ohne Ende weiter. Daher ist das Vorgehen folgendermassen: Du bildest die Zahl, die sich aus soviel aufeinanderfolgenden Zahlen, wie die zweite gegebene angibt, zusammensetzt, und zwar soll die letzte gleich der ersten gegebenen Zahl sein, das Resultat ist das Gewünschte. Beispiel dafür: Du willst die Anzahl der Variationen der fünften Klasse aus 8 Elementen wissen. Siehe, da die zweite Zahl 5 ist, nimmst du die aus fünf aufeinanderfolgenden Zahlen gebildete Zahl, so dass die letzte 8 ist, das ist 4 . 5 . 6 . 7 . 8, diese zusammengesetzte Zahl ist aber 6720, soviel Variationen

der fünften Klasse aus 8 verschiedenen Elementen gibt es. Das ist so, weil die Variationen der zweiten Klasse an Zahl 7×8 sind und die der dritten Klasse 6 . (7 . 8), wie es vorher gezeigt ist, und die Variationen der vierten Klasse 5 . (6 . 7 . 8) und die der fünften Klasse 4 . (5 . 6 . 7 . 8) und s. f., das ist alles aus dem Obigen klar.

Wenn du die Anzahl der Combinationen einer durch eine zweite gegebene Zahl bestimmten Klasse aus einer durch erste Zahl bestimmten Anzahl verschiedener Elemente wissen willst, suche die Zahl der Variationen der durch die zweite Zahl bestimmten Klasse aus so viel verschiedenen Elementen, wie die erste Zahl angibt und merke sie dir, dann suche die Permutationszahl der zweiten Zahl, und so gross wie die Zahl, die angibt, wie oft das Zwischenresultat in diesem Ergebnis enthalten ist, ist das Gesuchte. Beispiel dafür: Du willst die Anzahl der Combinationen der fünften Klasse aus 8 Elementen wissen. Sieh, wie oft die aus 1, 2, 3, 4, 5 zusammengesetzte Zahl in der aus 4, 5, 6, 7, 8 zusammengesetzten enthalten ist. Nun ist die aus 4, 5, 6, 7, 8 zusammengesetzte Zahl 6720, und die aus 1, 2, 3, 4, 5 zusammengesetzte ist 120, 6720 enthält 120 aber 56 mal, siehe, 56 ist das Gesuchte. Die Art der Teilung wirst du im nächsten Kapitel kennen lernen. Und um es dir zu erleichtern, so weisst du schon, dass die Anzahl der Combinationen der fünften Klasse aus 8 verschiedenen Elementen gleich der Anzahl der Combinationen der dritten Klasse aus diesen Elementen ist, deshalb sieh, wie oft die aus den Zahlen 6, 7, 8 gebildete Zahl, die 336 ist, die aus 1, 2, 3 gebildete Zahl, die gleich 6 ist, enthält, sie enthält sie aber 56mal, so viel sind die Combinationen der dritten Klasse aus 8 Elementen, so viel sind auch die Combinationen der fünften Klasse. Der Grund dafür ist in dem Früheren schon angegeben.

Fünftes Kapitel:

Von der Division von Zahlen durch Zahlen.

Du weisst schon, dass jedes Produkt den einen seiner Faktoren so oft enthält, wie die Anzahl der Einheiten des andern Faktors angibt. Wenn du daher die Zahl des Produkts und

einer der Faktoren kennst, so kannst du den andern Faktor berechnen. Und siehe, das Vorgehen bei dieser Operation ist so, dass du dir die Zahl des Produkts (den Dividenden) in eine Reihe schreibst und darunter in eine andre Reihe den bekannten Faktor, dann teilst du die obere Reihe durch die untere, das Resultat ist der zweite Faktor. Wie du aber die obere Reihe durch die untere teilen sollst, wird so sein, wie ich dir sagen werde. Betrachte zuerst die letzte Zahl der untern Reihe und die Zahl in der Stufe vorher, und alle Zahlen, die in den nach früheren Stufen der untern Reihe sind, betrachte als wären sie 1 in der vorletzten Stufe. Was du an Einheiten in der letzten Stufe hast, betrachte als Einer, und was du an Einheiten in der vorletzten Stufe hast, seien Zehntel eines Ganzen, merke dir, was du an Einern und Zehnteln hast. Dann betrachte die letzte Zahl der obern Reihe, sie gebe dir Einer und die Einheiten, die in der Stufe vorher sind, seien Zehntel, um die übrigen Zahlen kümmere dich nicht. Und wenn das, was du an Einern und Zehnteln erhalten hast, mehr ist als das Gemerkte oder so viel wie das Gemerkte, so rechne aus, wie viel ganze Male das Gemerkte darin enthalten ist, das Resultat setzest du in eine mittlere Reihe zwischen die beiden Reihen in die Rubrik, deren Abstand nach vorn von der letzten Rubrik der obern Reihe so gross ist wie der Abstand der letzten Rubrik der untern Reihe von der Rubrik der Einer. Dann multipliziere die untere Reihe mit der Zahl in der Resultatreihe, das Resultat ziehe von der obern Reihe ab und schreibe den Rest über die obere Reihe und streiche die frühere obere Reihe aus. Und wenn die letzte Zahl der obern Reihe mit den Zehnteln, die dabei waren, nicht soviel war wie das Gemerkte, so hole die letzte Stufe in die Vorhergehende herab, rechne die Einer von ihr und die Zehntel von der Vorhergehenden. Sieh, wie viel ganze Male das Resultat die gemerkte Zahl enthält, und schreibe das Ergebnis in die Rubrik, deren Abstand nach vorn von der letzten Rubrik der obern Reihe nach der Erniederung so gross ist, wie der Abstand der letzten Rubrik der untern Reihe von der Rubrik der Einer, dann machst du es so weiter, wie oben angegeben. Dann machst du es mit der obern Reihe, die du jetzt behalten hast, wie du es mit der ersten oberen Reihe gemacht hast, und so fährst du

fort, bis dir in der oberen Reihe nichts bleibt, oder bis die obere Reihe die untere nicht mehr enthält. Im Folgenden werden wir dir zeigen, was du mit diesem Rest machen sollst. Und manchmal wird es vorkommen, dass wir in der Resultatreihe zweimal in eine Rubrik schreiben müssen, aber es ist selten, dass das vorkommt.

Beispiel dafür: Wir wollen die Reihe 987654321 durch die Reihe 9437 teilen. Siehe, die letzte Zahl der untern Reihe, 9437, ist 9, sie seien Ganze, in der Rubrik vorher steht die Zahl 4, und alles, was vorher ist, gilt annäherungsweise als 1 in dieser Rubrik, sodass 5 darin stehen, sie gelten als Zehntel. Daher ist das zu Merkende 9 Ganze und 5 Zehntel. Siehe nun, 9 Ganze und 8 Zehntel enthält 9 Ganze und 5 Zehntel einmal, daher schreiben wir 1 in die Reihe zwischen den beiden Reihen in die vierte Rubrik vor der letzten der oberen Reihe, weil die letzte Zahl der untern Reihe von der vierten Stufe ist. Demnach ist die 1 in der Resultatreihe von der sechsten Stufe. Wir multiplizieren die untere Reihe mit 1 und erhalten 7 in der sechsten Stufe, 3 von der siebten, 4 von der achten, 9 von der neunten, wir ziehen das Ergebnis von der obern Reihe ab, es bleiben in der obern Reihe 43954321, das schreiben wir über die obere Reihe und streichen die frühere obere Reihe aus. Und siehe, in der letzten Rubrik der oberen Reihe sind mit dem, was vorher steht, 4 Ganze 3 Zehntel, das ist weniger als das zu Merkende, daher holen wir 4 als 40 in die vorhergehende Rubrik herab, 3 waren dort schon, das sind 43, und 9 Zehntel kommen aus der Rubrik vorher. Wir teilen 43 und 9 Zehntel durch 9 und 5 Zehntel, das zu Merkende, das ergibt 4 Ganze, wir schreiben 4 in die mittlere Reihe in die vierte Rubrik vor die der 43, daher sind die 4 von der vierten Stufe. Wir multiplizieren die untere Reihe mit 4 und erhalten 8 in der vierten Rubrik, 4 in der fünften, 7 in der sechsten, 7 in der siebten, 3 in der achten.

Wir ziehen das Ergebnis von der zweiten oberen Reihe ab, und es blieben 6206321. Siehe, was in der letzten Rubrik und in der vorangehenden steht ist weniger als der zu Merkende, daher holen wir die 6 der letzten Rubrik in die vorhergehende als 60 herab, und 2 waren dort, das sind 62, in der Rubrik vorher ist nichts. Wir teilen 62 durch das zu Merkende, das gibt

6, wir setzen sie in die dritte Rubrik, weil sie die vierte vor der Rubrik der 62 ist, die wir geteilt haben. Wir multiplizieren 6 von der dritten Stufe mit der untern Reihe, das gibt 2 in der dritten Stufe, 2 in der vierten, 6 in der fünften, 6 in der sechsten, 5 in der siebten. Wir ziehen das Ergebnis von der dritten oberen Reihe ab, es bleibt als vierte obere Reihe 544121. Wir holen 5 in die vorhergehende Rubrik herab, mit den 4, die dort standen sind es 54, und die 4 in der Stufe vorher sind 4 Zehntel,

					6	2	1	2	
				7	2	2	7	1	
			5	4	4	1	2	1	51)
		6	2	0	6	3	2	1	
	4	3	9	5	4	3	2	1	
9	8	7	6	5	4	3	2	1	Reihe d. Dividenden
			1	0	4	6	5	7	Resultatreihe
					9	4	3	7	Reihe des Divisors.
9	4	3	7	0	0	0	0	0	
	3	7	7	4	8	0	0	0	
		5	6	6	2	2	0	0	
			4	7	1	8	5	0	
				6	6	0	5	9	

wir teilen 54 und 4 Zehntel durch das zu Merkende, das gibt 5, wir schreiben sie in die mittlere Reihe in die zweite Rubrik, denn sie ist die vierte vor der Rubrik, die wir geteilt haben. Wir multiplizieren 5 von der zweiten Stufe mit der untern Reihe und erhalten 471850, das ziehen wir von der vierten oberen Reihe ab, es bleiben 72271, das ist die fünfte obere Reihe. Wir holen 7 in die Rubrik vor ihr herab, mit den 2, die dort waren, sind es 72, wir teilen sie durch das zu Merkende, das gibt 7, wir setzen sie in die mittlere Reihe in die erste Rubrik, da sie die vierte vor der Rubrik ist, die wir geteilt haben. Wir multiplizieren 7 von der ersten Stufe mit der unteren Reihe das gibt 66059. Siehe, das Resultat in der mittleren Reihe ist 104657, der Rest der oberen Reihe ist 6212, wir schreiben sie in die sechste Reihe. Richte dich in ähnlichen Fällen danach!

Du musst nun wissen: wenn die Zahlen in der oberen Reihe bis zu der Rubrik, deren Entfernung von der letzten dieser Reihe

so gross ist wie der Abstand der letzten Rubrik der untern Reihe von der ersten, wenn wir sie alle in diese Stufe herabgeholt haben, gleich den Zahlen der untern Reihe sind, nachdem wir sie in die erste Stufe aber noch weiter heruntergeholt haben, so ist es richtig, dass du in die Resultatreihe in die gehörige Rubrik eine 1 schreibst, selbst wenn du in der obern Reihe die Zahl der Zehntel nach der angegebnen Weise nicht ganz erreichst.

Beispiel: Du hast die Reihe 9, 4, 3, 7 durch die Reihe 9, 4, 3 zu teilen. Das zu Merkende, wird nach dem Angegebenen 9 Einer und 5 Zehntel sein, in der obern Reihe sind aber 9 Ganze und 4 Zehntel, deshalb könnten wir nach dem Vorherigen glauben, wir müssten die 9 in die Stufe vorher herunter holen. Wenn wir aber 9, 4, 3 der obern Reihe in die dritte Rubrik vor der Rubrik der 9 herunter holen, so sind es 943, so gross ist aber auch die Zahl der untern Reihe, wenn wir sie in die erste Rubrik gebracht haben, daher setze in die zweite Rubrik der Resultatreihe 1, multipliziere damit die untere Reihe und ziehe das Ergebnis von der obern Reihe ab, dann bleiben dir in der obern Reihe nur 7 von der ersten Stufe. Richte dich in ähnlichen Fällen danach! An so etwas musst du denken, wenn die letzte Zahl der untern Reihe gleich der letzten der obern und die nächste Zahl davor in der untern gleich der nächsten Zahl davor in der obern ist. Da es nun angebracht ist, auseinanderzusetzen, was du mit dem Rest in der obersten Reihe tun sollst, und es keinen Weg für diese Auseinandersetzung gibt, wenn man nicht vorher den Weg für die Multiplikation von Brüchen und ganzen Zahlen auseinandergesetzt hat, so wollen wir zuerst den Gang der Multiplikation von Brüchen und Doppelbrüchen auf alle Weisen auseinandersetzen[52]).

Wisse, dass das Verhältnis eines jeden Bruches zu 1 gleich dem Verhältnis von 1 zu dem Nenner dieses Bruchs ist. Beispiel: $^1/_3$ verhält sich zu 1, wie 1 zu 3, dem Nenner von $^1/_3$, weil 1 eben $^1/_3$ von 3 ist. Wenn das beachtet ist, so wollen wir auseinandersetzen, dass das Verhältnis des Produkts aus 1 und einem gegebenen Bruch zu dem Produkt 1 . 1 gleich dem Verhältnis von 1 zu dem Nenner des gegebenen Bruchs ist. Beispiel:

Das Produkt 1 . $^1/_3$ verhält sich zu dem Produkt 1 . 1 wie 1 zu 3. Das ist so, denn das Verhältnis des Produkts 1 . $^1/_3$ zu dem Produkt 1 . 1 ist gleich dem Verhältnis $^1/_3$ zu 1, aber das Verhältnis $^1/_3$ zu 1 ist gleich dem von 1 zu 3 und das Verhältnis 1 : 3 ist $^1/_3$, also ist das Produkt aus $^1/_3$ und 1 gleich dem dritten Teil von 1, weil das Produkt 1 . 1 gleich 1 ist. Und ebenso beweist man, dass das Produkt einer gegebenen Anzahl von ganzen Zahlen oder einer ganzen Zahl in eine gegebene Anzahl von Brüchen oder einen Bruch, so viel derartige, durch den Nenner bestimmte, Teile sind, wie das Produkt aus Multiplikator und Multiplikanden besagt. Beispiel: Wir wollen $^5/_7$ und 40 Ganze multiplizieren; wir behaupten, dass das Resultat so viel siebte Teile von 1 sind, wie das Produkt 5 . 40, das gleich 200 ist, besagt. Das ist so, denn das Verhältnis $^5/_7$. 40 zu $^1/_7$. 1 setzt sich aus 2 Verhältnissen zusammen, aus dem Verhältnis 5 zu 1 und 40 zu 1. Nun ist das aus diesen beiden zusammengesetzte Verhältnis gleich dem von 200 zu 1. Also verhält sich das Produkt $^5/_7$. 40 zu $^1/_7$. 1, wie 200 zu 1, aber das Produkt $^1/_7$. 1 ist gleich $^1/_7$, also ist das Produkt $^5/_7$. 40 gleich 200 mal dem siebten Teil von 1, das ist 28 Ganze und $^4/_7$. Ohne Zweifel kann man die Sache auf dieselbe Weise beweisen, wenn nur einer der beiden Faktoren, d. h. die Brüche oder die Ganzen, eine Zahl aufweisen.

Nachdem so die Multiplikation von Brüchen und ganzen Zahlen auf alle Weisen dargelegt ist, wollen wir den Gang bei Multiplikation von Brüchen mit Brüchen darlegen. Wir wollen zeigen, dass das Verhältnis des Produkts zweier Brüche zu 1 gleich dem Verhältnis von 1 zu dem Produkt des einen Nenners in den andern ist. Beispiel: Das Verhältnis des Produkts $^1/_3$. $^1/_5$ zu 1 ist gleich dem Verhältnis von 1 zu dem Produkt 3 . 5, das gleich 15 ist. Das ist der Fall, denn das Verhältnis des Produkts $^1/_3$. $^1/_5$ zu dem Produkt 1 . 1, das gleich 1 ist, setzt sich aus den zwei Verhältnissen $^1/_3$ zu 1 und $^1/_5$ zu 1 zusammen, und ebenso setzt sich das Verhältnis des Produkts 1 . 1, das gleich 1 ist, zu dem Produkt 3 . 5, aus 2 Verhältnissen, $^1/_3$ zu 1 und $^1/_5$ zu 1 zusammen. Aber auch das Verhältnis des Produkts $^1/_3$. $^1/_3$ zu dem Produkt 1 . 1 war aus diesen beiden Verhältnissen zusammengesetzt, also verhält sich das Produkt $^1/_3$. $^1/_5$ zu 1 wie 1 zu dem Produkt 3 . 5. Nun ist der Wert des Verhältnisses von 1 zu 3 . 5

gleich $^1/_{15}$, also ist das Produkt $^1/_3 \cdot {^1/_5}$ gleich dem fünfzehnten Teil von 1. Richte dich in ähnlichen Fällen danach.

So beweist man, dass das Produkt aus $^1/_3$ und $^1/_3$ gleich dem neunten Teil von 1 ist, und so beweist man auch, dass das Produkt einer gegebenen Anzahl von Brüchen oder eines Bruches in eine gegebene Anzahl von Brüchen oder einen Bruch gleich soviel derartiger, durch das Produkt der beiden Nenner benannter Teilen ist, wie das Produkt aus dem Zähler des Multiplikators und dem des Multiplikanden angibt. Beispiel: Wir wollen $^4/_7$ mit $^5/_9$ multiplizieren und behaupten, dass das Resultat gleich soviel dreiundsechzigstel Teilen von 1 — das ist durch das Produkt der beiden Nenner bestimmt — ist, wie das Produkt 4 . 5, also 20, angibt. Das ist der Fall, denn das Verhältnis $^1/_7 \cdot {^1/_9}$ zu $^4/_7 \cdot {^5/_9}$ setzt sich aus 2 Verhältnissen zusammen, aus dem Verhältnis von 1 zu 4 und dem von 1 zu 5, aber dieses zusammengesetzte Verhältnis ist gleich dem von 1 zu 20, also verhält sich das Produkt $^1/_7 \cdot {^1/_9}$ zu dem Produkt $^4/_7 \cdot {^5/_9}$ wie 1 zu 20. Das Produkt $^1/_7 \cdot {^1/_9}$ ist aber der dreiundsechzigste Teil von 1, also ist $^4/_7 \cdot {^5/_9}$ gleich 20 solchen dreiundsechzigsten Teilen von 1. Richte dich in ähnlichen Fällen danach. Und ohne Zweifel beweist man das auf ebendiese Weise, wenn nur einer von ihnen einen Zähler hat.

Und wenn dieses alles klar ist, so wollen wir dir zeigen, auf welche Weise man den Nenner bei einem Doppelbruch findet. Wir behaupten, dass der Nenner eines Doppelbruchs die Zahl ist, die sich aus dem Produkt der Nenner dieser Brüche zusammensetzt. Beispiel: Der Nenner von einem Drittel eines Fünftels eines Drittels ist aus den 3 Zahlen 3, 5, 3 zusammengesetzt, daher ist er der fünfundvierzigste Teil von 1. Das ist so, denn das Verhältnis des Produkts $^1/_5 \cdot {^1/_3}$ zu dem Produkt 1 . 1 ist gleich dem Verhältnis des Produkts 1 . 1 zu dem Produkt 3 . 5, also ist $^1/_5 \cdot {^1/_3}$ gleich dem fünfzehnten Teil von 1. Und ebenso ist das Verhältnis des Produkts $^1/_3 \cdot {^1/_{15}}$ von 1 zu dem Produkt 1 . 1 wie das Verhältnis des Produkts 1 . 1 zu dem Produkt 3 . 15.

Und nachdem wir den Nenner kennen, kannst du die Multiplikation auf die vorige Weise sowohl bei ganzen Zahlen als bei Brüchen durchführen. Beispiel dafür: Wenn wir $^5/_7$ eines Drittels

mit $^7/_8$ multiplizieren wollen, so ist der Nenner für ein Siebtel eines Drittels 21, und der Nenner von $^1/_8$ ist 8, die aus den beiden Nennern zusammengesetzte Zahl ist 168. Wir multiplizieren 5 mit 7, das gibt 35, es sind 35 Teile, von denen 168 ein Ganzes geben. Richte dich in ähnlichen Fällen danach.

Die Weise der Addition von ungleichnamigen Brüchen: Suche das kleinste gemeinschaftliche Vielfache für diese Brüche, das ist der Nenner, und von ihm nimmst du diese Brüche in ihrer Gesamtheit, und das Resultat teilst du durch den Nenner, das ist das Gewünschte. Beispiel dafür: Wenn wir $^2/_3$ und $^4/_5$ und $^5/_6$ und $^3/_4$ eines Sechstels addieren wollen, so wissen wir schon, dass das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 3, 5, 6, 24 gleich 120 ist; die Weise des Aufsuchens hat Euklid schon dargelegt. Nun sind $^2/_3$ gleich 80, das zeigt sich, wenn wir 120 durch 3 teilen und zwei gleiche Teile des Resultats nehmen, $^4/_5$ sind 96, $^5/_6$ sind 100 und $^3/_4$ eines Sechstels sind 15. Addieren wir alle diese Zahlen, so ergibt das 291. Wir teilen 291 durch 120, das gibt zwei Ganze und 51 Teile, von denen 120 auf eins gehen. Das ist so, weil $^2/_3$ von 1 sich zu 1 verhält wie $^2/_3$ von 120 zu 120, so zeigt man das auch bei den übrigen Zahlen. Addieren wir, so verhält sich die Summe aller dieser Brüche zu 1 wie 291 zu 120. Richte dich in ähnlichen Fällen danach.

Der Weg, das Resultat der Multiplikation von Brüchen mit Brüchen oder Doppelbrüchen zu finden: du weisst schon, dass die Multiplikation von Brüchen mit Brüchen Brüche ergibt, deren Nenner sich aus ihren Nennern zusammensetzt, und es ist schon bewiesen, dass die aus mehreren anderen zusammengesetzte Zahl jede der Zahlen so oft enthält, wie die Einheiten der aus den übrigen Zahlen zusammengesetzten angeben, und so enthält sie die aus irgend welchen von ihnen zusammengesetzte Zahl so oft, wie die Einheiten der aus dem Rest der Zahlen zusammengesetzten angeben. Wenn dem so ist, und du teilst die Zahl die du hast, durch eine der Zahlen, wird das Resultat Teile ergeben, die die aus den anderen zusammengesetzte Zahl als Nenner hat. Beispiel dafür: Wenn du $^6/_7$ mit $^7/_8$ multiplizierst so kommt 42 heraus, und wenn du 42 durch 7 teilst, so enthält das Resultat, das du bekommst, Achtel, weil die aus 7 und 8

zusemmengesetzte Zahl 7 achtmal enthält, daher ist das Resultat $^6/_8$. Und wenn du 42 durch 8 teilst, so enthält das Resultat Siebtel. Daher ist das Resultat $^5/_7$ und $^2/_8$ eines Siebtels. Ein anderes Beispiel: Wenn du $^{28}/_{29}$ mit $^6/_7$ eines Drittels multiplizieren willst, und multiplizierst 28 mit 6, so ergibt das 168. Wenn du nun 168 durch 29 teilst, so bekommst du Siebtel eines Drittels, das sind die übrigen Brüche, und dein Resultat ist $^5/_7$ eines Drittels und $^{23}/_{29}$ eines Siebtels eines Drittels. Und wenn du durch die aus 7 und 3 gebildete Zahl, also 21, teilst, so besteht das Resultat aus Neunundzwanzigsteln, das ist der andere Bruch, daher ist das Ergebnis $^8/_{29}$. Und wenn du durch 7 teilst, so erhältst du dritte Teile von Teilen, von denen 29 auf 1 gehen, und daher ist das Resultat 24 dritte Teile von Teilen, von denen 29 auf 1 gehen, das sind $^8/_{29}$. Und wenn du durch 3 teilst, so erhältst du siebte Teile von Teilen, von denen 29 auf 1 gehen; und daher ist das Resultat $^{56}/_7$ Teile, von denen 29 auf 1 gehen, das sind $^8/_{29}$. Richte dich in ähnlichen Fällen danach.

Die Weise, Brüche mit Brüchen zu multiplizieren und das Resultat mit Brüchen u. s. w.: Multipliziere die Zähler der ersten Brüche mit den Zählern der zweiten und das Resultat multipliziere mit dem Zähler der dritten Brüche u. s. w., bis alle Brüche zu Ende sind. Dann dividiere das Resultat mit dem Nenner eines der Brüche oder mit dem Produkt der Nenner beliebig vieler der Brüche, das Resultat, das du erhältst, ist eine gewisse Zahl von Brüchen, deren Nenner das Produkt der Nenner der übrigen Brüche ist, du wirst dir die bequemste Weise zur Division heraussuchen. Beispiel dafür: Wir wollen $^6/_7$ mit $^5/_6$, das Resultat mit $^3/_4$, das neue Resultat mit $^7/_8$, dieses Resultat mit $^2/_3$, das Resultat mit $^2/_7$ und dieses Resultat mit einem Drittel eines Drittels multiplizieren. Wir multiplizieren 6 mit 5, das gibt 30, multiplizieren 30 mit 3, das gibt 90, multiplizieren 90 mit 7, das gibt 630, multiplizieren 630 mit 2, das gibt 1260, multiplizieren 1260 mit 2, das gibt 2520, multiplizieren 2520 mit 1, das gibt 2520. Siehe, die Brüche, die du hast, sind: Siebtel, Sechstel, Viertel, Achtel, Drittel, Siebtel, Drittel eines Drittels. Und wenn wir 2520 durch den Nenner eines dieser Brüche dividieren, so enthält das Resultat Teile, die durch die Zahl benannt sind, die sich aus den Nennern der übrigen Brüche zusammensetzt. Und da die Zahl

gross ist, ist es bequem, dass du durch eine Zahl teilst, die sich aus einem Teil der Nenner zusammensetzt, und von der du glaubst, dass es am bequemsten ist, durch sie zu teilen. Teilst du durch die Zahl, die sich aus 7, 6, 3, 4, zusammensetzt, nämlich 504, so gibt das 5, das sind Brüche, die als Nenner das Produkt der Nenner der übrigen Brüche haben. Nun sind die übrigen Brüche Achtel, Siebtel, Drittel eines Drittels, also ist das Resultat dieser Multiplikation 5 Achtel von Siebteln von Dritteln eines Drittels. Richte dich in ähnlichen Fällen danach. Das ist so, weil man mit geringem Nachdenken sehen kann, dass das Resultat 2520 Teile von 1 sind, die als Nenner das Produkt der Nenner aller Brüche haben. Ueberlege es, du wirst es verstehen.

Ein anderer leichterer Weg dafür: Wisse, die Zahl, die sich aus gegebenen Zahlen und gegebenen Brüchen zusammensetzt, verhält sich zu 1 wie das Verhältnis, das sich aus dem Verhältnis der Zähler dieser Brüche als Vordergliedern zu den Nennern dieser Brüche als Hintergliedern zusammensetzt. Beispiel dafür: Das Verhältnis des Produkts $^3/_7 \cdot {}^4/_5 \cdot {}^2/_5$ eines Viertels zu dem Produkt 1 . 1 und dem Produkt aus 1 und diesem Resultat, das auch 1 ist, setzt sich aus drei Verhältnissen zusammen: Aus dem Verhältnis von $^3/_7$ zu $^7/_7$, was gleich eins ist, aus dem Verhältnis von $^4/_5$ zu $^5/_5$, was gleich eins ist, und aus dem Verhältnis von $^2/_{12}$ zu $^{12}/_{12}$, was auch gleich eins ist. Nun weisst du schon, dass, wenn man die Ordnung der Vorderglieder oder der Hinterglieder oder beider zugleich vertauscht, das zusammengesetzte Verhältnis dasselbe bleibt. Wenn dem so ist, und du hast eine Anzahl von Brüchen mit einer Anzahl von Brüchen zu multiplizieren u. s. w., so kannst du die Zähler der einen Brüche mit den Zählern der anderen Brüche vertauschen, wenn es für die Multiplikation bequemer ist. Beispiel dafür: Wenn du $^3/_7$ mit $^7/_8$ zu multiplizieren hast, so kannst du die 7 zu den Siebteln hinübervertauschen, dann hast du $^3/_8$ und $^7/_7$, was gleich 1 ist, zu multiplizieren, das Resultat ist $^3/_8$, das ist das Gewünschte. Ein anderes Beispiel: Wenn du $^4/_7$ mit $^5/_8$ multiplizieren willst, so kannst du die 4 zu den 8 hinübervertauschen, und du hast $^4/_8$, was gleich der Hälfte von eins ist, mit $^5/_7$ zu multiplizieren und du erhältst $^2/_7$ und $^1/_2 \cdot {}^1/_7$. Das ist das Gewünschte.

Ein anderes Beispiel: Wenn du $^3/_7$ mit $^4/_5$, das Resultat mit $^6/_7$, das Resultat mit $^7/_8$ zu multiplizieren hast, so vertausche die Zähler, die 3, 4, 6, 7 sind, so dass sie an den bequemsten Stellen stehen, daher setze die 7 zu den Siebteln, die 4 zu den Vierteln, die 6 zu den Achteln und die 3 zu den Fünfteln, dann hast du $^7/_7$, also 1, mit $^4/_4$, das auch gleich 1 ist, zu multiplizieren, das gibt 1, das Resultat, also 1, multipliziere mit $^6/_8$, du erhältst $^3/_4$; das Resultat multipliziere mit $^3/_5$, du erhältst $^9/_4$ eines Fünftels. Teilst du durch 4, so enthält das Resultat Fünftel, und du bekommst $^2/_5$ und $^1/_4$ eines Fünftels. Teilst du durch 5, so enthält das Resultat Viertel, du erhältst $^1/_4$ und $^4/_5$ eines Viertels, das ist das Gewünschte.

Ein anderes Beispiel: Wenn du $^3/_5$ mit $^1/_6$, das Resultat mit $^7/_8$, das Resultat mit $^4/_9$ zu multiplizieren hast, vertausche die Zähler, 3, 7, 4, so dass sie an den bequemsten Stellen stehen. Daher setze die 3 zu den Sechsteln, die 4 zu den Achteln, die 7 zu den Neunteln, es bleibt $^1/_5$ ohne Zähler. Dann multiplizierst du $^3/_6$, das ist $^1/_2$, mit $^4/_8$, das auch $^1/_2$ ist, du erhältst $^1/_4$, multipliziere es mit $^1/_5$, du erhältst $^1/_4$ eines Fünftels, multipliziere $^7/_9$ mit $^1/_4$ eines Fünftels, so erhältst du $^7/_4$ eines Fünftels eines Neuntels. Richte dich in ähnlichen Fällen danach.

Die Weise der Multiplikation beliebiger Brüche und einer Summe ungleichnamiger Brüche: Wenn du mit einem beliebigen Bruch oder mit einer Anzahl beliebiger Brüche eine Summe ungleichnamiger Brüche zu multiplizieren hast, so multipliziere mit dem gegebenen Bruch oder den gegebenen Brüchen die erste Art der ungleichnamigen Brüche, teile das Resultat durch den Nenner des Multiplikanden, damit das Resultat Teile sind, die dem Multiplikator entsprechen, so machst du es, bis die ganze Reihe mit dem ersten Glied des Multiplikators multipliziert ist, dann sind alle Brüche, die du im Resultat hast, Brüche von der Benennung des Multiplikators.

Beispiel: Wir wollen $^6/_7$, $^7/_8$ und $^1/_9$, mit $^2/_3$ multiplizieren. Wir multiplizieren 2 mit 6, das gibt 12, teilen es durch 7, den Nenner des Multiplikandenbruchs, das gibt 1 und $^5/_7$, und zwar sind $^1/_3$ und $^5/_7$ eines Drittels. Wir multiplizieren 2 und 7, das gibt 14, teilen das durch 8, das entspricht dem Multiplikandenbruch, es gibt 1 $^6/_8$, das ist $^1/_3$ und $^3/_4$ eines Drittels. Wir mul-

tiplizieren 2 und 8, das gibt 16, teilen es durch 9, das gibt 1 und $^7/_9$, und zwar ist das $^1/_3$ und $^7/_9$ eines Drittels. Wir addieren alle Brüche des Resultats, das waren $^3/_3$, $^5/_7$ eines Drittels, $^3/_4$ eines Drittels, $^7/_9$ eines Drittels, das gibt 1 Ganzes und $^2/_3$ und 61 Teile, von den 756 ein Ganzes sind. Richte dich in ähnlichen Fällen danach.

Und wenn du ganze Zahlen und Brüche, so viele es seien mögen, mit ganzen Zahlen und Brüchen, so viele es seien mögen, zu multiplizieren hast, so weisst du ja schon, wie man ganze Zahlen mit einander und ganze Zahlen mit Brüchen und Brüche mit Brüchen zu multiplizieren hat. Daher multiplizierst du mit allen Ganzen der Multiplikatorreihe alle Ganzen und Brüche der Multiplikandenreihe, dann multiplizierst du mit allen Brüchen der Multiplikatorreihe alle Ganzen und Brüche der Multiplikandenreihe. Beispiel dafür: Wenn du mit 12 Ganzen und $^3/_5$ und $^4/_9$ 21 Ganze und $^2/_3$ und $^3/_4$ multiplizieren willst, so multipliziere 12 und 21, das gibt 252, multipliziere 12 und $^2/_3$, das gibt 8 Ganze, multipliziere 12 und $^3/_4$, das gibt 9 Ganze. Dann multipliziere $^3/_5$ und 21 Ganze, das gibt 12 Ganze und $^3/_5$, multipliziere $^3/_5$ mit $^2/_3$, das gibt $^2/_5$, multipliziere $^3/_5$ und $^3/_4$, das gibt $^2/_5$ und $^1/_4$ eines Fünftels. Multipliziere $^4/_9$ und 21 Ganze, das gibt 9 Ganze und $^1/_3$, multipliziere $^4/_9$ und $^2/_3$, das gibt $^2/_9$ und $^2/_3$ eines Neuntels, multipliziere $^4/_9$ mit $^3/_4$, das gibt $^1/_3$. Addieren wir alle Ergebnisse, so erhalten wir 292 Ganze $^2/_5$ und 7 Teile, von denen 540 auf 1 gehen, das ist das Gewünschte.

So ist ein ähnlicher Fall, wenn dort Doppelbrüche sind, denn du weisst schon, auf welche Weise man sie multipliziert. Manchesmal hast du da viele Operationen nötig, wie z. B., wenn du eine Anzahl von ganzen Zahlen und Brüchen und von Produkten aus Brüchen und Brüchen oder ganzen Zahlen mit ganzen Zahlen und Brücheu und Produkten von Brüchen und Brüchen zu multiplizieren hast. Der Weg ist hier der, dass du zuerst den Multiplikator berechnest, indem du suchst was das Produkt ergibt und das zu den Ganzen und Brüchen addierst, kurz, du addierst zuerst den ganzen Multiplikator. Dann addierst du den Multiplikanden und multiplizierst dann auf die vorige Art alles, was in der einen Reihe steht, mit allem, was in der andern ist,

Und wenn du Brüche, soviel es sind, von ungleichnamigen Brüchen abzuziehen hast, so suche zuerst das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner aller dieser Brüche, und das wird der Nenner, von ihm nimmst du die Teile, die du abziehen willst, setzest sie in eine Reihe; dann nimmst von ihm die Teile, von denen du abziehen willst, und von ihnen ziehst du die andre Reihe ab, was dir bleibt, sind Teile, die den Nenner haben, den wir genommen. Das ist klar.

Ein andrer Weg, ganze Zahlen und Brüche mit ganzen Zahlen und Brüchen zu multiplizieren: Nimm das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner aller dieser Brüche, es ist jetzt der Nenner, mit ihm multipliziere die Multiplikatorreihe, setze das Ergebnis in eine erste Reihe. Auch die Multiplikandenreihe multipliziere mit dem Nenner und setze das Resultat in eine zweite Reihe. Multipliziere mit der obern Reihe die untere, teile das Ergebnis durch das Quadrat des Nenners, das Resultat ist das Gewünschte. Beispiel: Du hast mit 12 Ganzen und $^3|_5$ und $^4|_9$ 21 Ganze und $^2|_3$ und $^3|_4$ zu multiplizieren. Du weisst, dass das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller dieser Nenner 180 ist. Nimm 12 Teile, die gleich 180 sind, und $^3|_5$ von von 180 und $^4|_9$ von 180, das gibt 2348, setze das in eine Reihe. Nimm 21 Teile die gleich 180 sind, und $^2|_3$ von 180 und $^3|_4$ von 180, das gibt 4035, setze sie in die andre Reihe. Multipliziere die eine Reihe mit der andern, das gibt 9474180. Teile das Ergebnis durch das Quadrat von 180, das gibt 292 Ganze, es bleibt als Rest 13380, das sind Teile, von denen so viele auf 1 gehen, wie das Quadrat von 180 besagt. Und wenn du das prüfst, findest du den Rest gleich $^2|_5$ und 420 Teilen, von denen so viel auf 1 gehen, wie das Quadrat von 180 angibt, das sind $^2|_5$ und $^7|_{540}$, das stimmt mit der ersten Rechnung. Richte dich in ähnlichen Fällen danach. Das ist so, denn, weil jeder Faktor des Produkts mit 180 multipliziert wurde, ist das Verhältnis des einen Produkts zu dem andern gleich dem Verhältnis des einen Faktors zu dem entsprechenden, mit sich selbst multipliziert, weil die Flächen [53]) ähnlich sind. Aber das Verhältnis des einen Faktors zum andern ist 180 zu 1, also verhält sich das eine Produkt zum andern, wie das Quadrat von 180 zu 1, also enthält das Produkt, dessen Faktoren mit 180 multipliziert sind, das Quadrat von 180 so oft, wie das erste Produkt angibt.

Nachdem nun die Weise der Multiplikation auseinandergesetzt ist, wollen wir dir angeben, was du mit dem anfangen sollst, was du nicht teilen konntest. Der Gang ist der, dass du teilst, soweit du teilen kannst, und der Rest stellt Teile dar, von denen so viele auf 1 gehen, wie die Zahl der Divisorreihe angibt. Beispiel dafür: Wenn du 53 durch 14 teilen willst, so gibt das 3 Rest 11. Das sind 11 Teile, von denen 14 auf 1 gehen. Das ist so, weil $^{1}|_{14}$ multipliziert mit 14, 14 Teile bedeutet, von denen 14 auf 1 gehen, also ein Ganzes. Daher geben die 11 Teile, wenn sie mit 14 multipliziert werden, 11 Ganze. Das war unser Rest. Richte dich in ähnlichen Fällen danach.

Wenn du ganze Zahlen und Brüche durch ganze Zahlen und Brüche teilen willst, so suche den Generalnenner aller dieser Brüche und multipliziere mit ihm die ganze Reihe, die du teilen willst, setze das Resultat in eine Reihe, dann multipliziere mit dem Generalnenner die Reihe, mit der du teilen willst, setze das Ergebnis in eine zweite Reihe unter die erste, so dass du die Resultatreihe zwischen die zwei Reihen setzen kannst. Und wenn du das vollendest hast, so teile die obere Reihe durch die untere, das Ergebnis ist das gesuchte Resultat. Beispiel dafür: Wenn du 84 und $^{3}|_{5}$ und $^{3}|_{4}$ durch 10 und $^{2}|_{3}$ und $^{3}|_{8}$ teilen willst, so ist der Generalnenner für alle diese Brüche 120. Wir multiplizieren 84 und $^{3}|_{5}$ und $^{3}|_{4}$ mit 120, das gibt 10242, das ist die zu teilende Reihe. Wir multiplizieren 10 und $^{2}|_{3}$ und $^{3}|_{8}$ mit 120, das gibt 1325. Teilst du dann die obere Reihe durch die untere, so gibt das 7 Ganze und 967 Teile, von denen 1325 ein Ganzes bilden, das ist das Gewünschte. Das ist so, denn es sind erstens 84 Ganze und $^{3}|_{5}$ und $^{3}|_{4}$, zweitens 10 Ganze und $^{2}|_{3}$ und $^{3}|_{8}$ in gleicher Weise, nämlich 120mal vergrössert worden, also verhalten sich die vergrösserten ersten Teile zu den vergrösserten zweiten, wie die ersten zu den zweiten. Das Verhältnis der vergrösserten ersten Teile zu den vergrösserten zweiten hat aber den Wert 7 Ganze $^{997}|_{1325}$, also hat das Verhältnis der ersten Zahl zur zweiten auch den Wert 7 Ganze $^{967}|_{1325}$. Wenn du die Probe darauf machen willst, multipliziere 10 und $^{2}|_{3}$ und $^{3}|_{8}$ mit 7 und $^{967}|_{1325}$, dann wirst du 84 Ganze $^{3}|_{5}$ und $^{3}|_{8}$ erhalten.

Nachdem dieses auseinandergesetzt, ist es angebracht, dir die Weise der Division bei „geometrischen Brüchen“ zu erläutern,

Du weisst schon, dass das Ergebnis der Multiplikation von Brüchen mit Brüchen in die Stufe gehört, deren Abstand von der Stufe des Multiplikators nach vorn gleich dem Abstand des Multiplikanden von der Stufe der Einer ist. Und wenn das beachtet ist, so will ich dir einen Weg angeben, Brüche und ganze Zahlen mit Brüchen und ganzen Zahlen zu multiplizieren, und daraus kannst du alle Weisen der Multiplikation von Brüchen ersehen. Wenn du Ganze und geometrische Brüche mit ganzen Zahlen und solchen Brüchen multiplizieren willst, so ist es angebracht, dass du die Zahl, die weniger Zahlen in ihren Stufen hat, in eine Reihe nach ihren Rubriken hinschreibst und einen Strich zwischen die ganzen Zahlen und die Brüche machst, wie wir es oben erwähnt. Dann schreibe die andre Zahl nach ihren Rubriken in eine andre Reihe darunter, multipliziere die erste Zahl der obern Reihe und die erste der untern und setze das Resultat in die gehörige Rubrik, wenn mehr als 60 herauskommt, teile das Resultat durch 60, das Ergebnis sind Einer in der folgenden Rubrik, und den Rest setzt du in die gehörige Rubrik. Und wenn in der folgenden Rubrik mehr als 60 herauskäme, so teilst du noch einmal durch 60. So machst du es, bis du zu der Stufe der Einer kommst, und von da an teilst du nur durch 10, der Grund dafür ist einleuchtend. So fährst du fort, bis alle Zahlen der untern Reihe mit allen der obern multipliziert sind. Es sind dann soviel Resultatreihen, wie Rubriken in der obern Reihe sind, in denen Zahlen stehen, ausgenommen die Rubriken der ganzen Zahlen, für die zusammen nur eine Resultreihe besteht, so viel es auch sein mögen. Dann addierst du, was in allen Resultatreihen steht, das Ergebnis ist das Gewünschte. Und wenn du so weit bist, dass du mit den Brüchen ganze Zahlen zu multiplizieren hast, dann multipliziere sie zusammen[54]) mit allen Ganzen auf einmal, damit die Rechnung nicht verunziert wird, und teile das Resultat durch 60 wie oben, den Rest setze jedesmal an die gehörige Stelle. Und wenn du dazu kommst, die Brüche mit ganzen Zahlen zu multiplizieren, multipliziere gleichfalls jedesmal mit allen ganzen Zahlen, die in der obern Reihe stehen, zusammen die Brüche der untern Reihe. Beispiel dafür: Wir wollen in diesem Schema mit 57 Secunden, 9 Primen und 83 Ganzen 7090 Ganze, 40 Secunden, 51 Terzen, 3 Quarten multiplizieren,

Wir multiplizieren 57 Secunden und 3 Quarten, das gibt 2 Quinten und 51 Sexten. Wir multiplizieren 57 Secunden und 51 Terzen, das gibt 48 Quarten und 27 Quinten. Wir multiplizieren 57 Secunden und 40 Secunden, das gibt 38 Terzen. Wir multiplizieren 57 Secunden mit 7090 Ganzen, das gibt 30 Secunden, 15 Primen, 2 Ganze in der ersten Rubrik, 1 in der zweiten, 1 in der dritten. Und wenn wir das so weiter fortführen, bis alle Zahlen der untern Reihe mit allen Zahlen der obern multipliziert sind, so ergibt sich das Resultat: 51 Sexten, 56 Quinten, 36 Quarten, 23 Terzen, 7 Secunden, 42 Primen und 589646. Richte dich in ähnlichen Fällen danach.

Reihe des Multiplikators					8	3	9	57				
Reihe d. Multiplikanden			7	0	9	0		40	51	3		
				1	1	2	15	30	38	48	27+2	51
			1	0	6	3	30	6	7	39	27	
	5	8	8	4	7	0	55+1	10+20	4+33	9		
Resultatreihe	5	8	9	6	4	6	42	7	23	36	56	51

Und wenn du eine Zahl durch ganze Zahlen und solche Brüche, mit denen wir uns eben beschäftigen, teilen willst, so schreibe die Zahl, die du teilen willst, in eine obere Reihe und die Zahl, durch die du teilen willst, in eine untere an die gehörigen Stellen, so dass du das Resultat zwischen die beiden Reihen setzen kannst, wie du es früher getan. Dann sieh, was in der letzten Rubrik der untern Reihe ist, das betrachte als Einer und alle Zahlen, die vor der vorhergehenden Rubrik stehen, betrachte als 1 in der vorhergehenden Rubrik, addiere sie zu der Zahl, die in ihr steht, und wenn die Rubrik vor der letzten ganze Zahlen enthielt, betrachte das, was in ihr steht, als Zehntel, und enthielt sie Brüche, so stelle die Zahl, die in ihr ist, Sechzigtel vor, addiere sie zu den Einern in der letzten Rubrik, das ist das zu Merkende, mit dem du die letzte Rubrik der obern Reihe und das, was in der vorhergehenden steht, teilen sollst, seien dieses Zehntel oder Sechzigstel. Das Ergebnis setze in die nach dem Vorangegangenen richtige Rubrik und multipliziere damit die untere Reihe, das Ergebnis ziehe von der obern Reihe ab, und so fährst du fort, bis in der

obern Reihe weniger als in der Divisorreihe übrig bleibt. Beispiel dafür: Wir wollen 700 und 40 Primen und 50 Secunden durch 9 Ganze, 20 Primen und 30 Terzen teilen. Siehe, wir betrachten die Zahlen, die vor der vorletzten Rubrik der untern Reihe stehen, als 1 in dieser, 20 fanden wir darin schon vor, also sind es 21, und zwar $^{21}/_{60}$, in der letzten Rubrik sind 9, und zwar Einer. Daher ist das zu Merkende 9 und $^{21}/_{60}$. Wir teilen die Zahl in der letzten Rubrik der obern Reihe steht, das sind 70, nachdem wir sie in die vorhergehende Stufe herabgeholt, das gibt nach den Vorigen 7 von der zweiten Stufe. Wir schreiben 7 in die zweite Rubrik der mittleren Reihe und multiplizieren die untere Reihe damit. Wenn wir das auf die erwähnte Weise durchführen, so ergibt sich das Resultat: 7 von der zweiten Stufe, 5 von der ersten, in der obern Reihe bleibt ein ungeteilter Rest von 40 Primen, 12 Secunden, 30 Terzen. Richte dich in ähnlichen Fällen danach.

Die Weise, den Rest, dessen Teilung nicht aufgeht, zu teilen, wenn in der untern Reihe ganze Zahlen stehen. Wir wollen dieser Erläuterung vorausschicken, dass die Division von irgend welchen Brüchen durch ganze Zahlen Brüche derselben Stufe ergibt. Das geht aus der Multiplikation hervor. Wenn du das betrachtet hast, so sieh, wieviel Primen dir in der obern Reihe geblieben sind, wenn du das Letzte der obern Reihe in die Stufe der Primen bringst. Diese Zahl der Primen, die du dann hast, sieh als Einer an, und was in der Rubrik vorher ist, seien Sechzigstel. Teile durch das zu Merkende, das Ergebnis sind Primen, schreibe sie in die Resultatreihe an die rechte Stelle und multipliziere die ganze untere Reihe damit, mit der du geteilt hast. Das Resultat ziehe von der obern Reihe ab. Ferner teile die letzte Zahl der obern Reihe durch das zu Merkende, kannst du das nicht teilen, so hole es in die vorhergehende Rubrik herab, so kannst du das unendlich weit fortsetzen. Das zu Merkende findet man jedoch, indem man alle Ganzen der untern Reihe in die erste Stufe bringt, das Ergebnis als Einer betrachtet und alles, was vor der ersten Rubrik ist als Sechzigstel nach der vorigen Weise ansieht; so findest du das zu Merkende für den Rest, bei dem die Teilung nicht aufgeht, wenn in der untern Reihe ganze Zahlen sind. Beispiel dafür: der Rest, dessen Teilung in

unserm obigen Beispiel nicht aufging. Wir teilen 40 und 12 Teile durch das zu Merkende, nämlich 9 und $^{21}/_{60}$, das gibt 4 Teile, und zwar Primen, da wir Primen durch ganze Zahlen geteilt haben, wir multiplizieren 4 Primen und die untere Reihe, das gibt 37 Primen, 20 Secunden, 2 Terzen, das ziehen wir von der obern Reihe ab, es bleiben 2 Primen, 52 Secunden, 28 Terzen. Wir können 2 Primen aber durch das zu Merkende nicht teilen, wir holen sie zu den Secunden herab, also sind es 172 und $^{28}/_{60}$. Wir teilen sie durch das zu Merkende, das gibt 18 Teile, und zwar Secunden.

				4	28	
			2	52	28	
			40	12	30	
	4	7	20	15		
7	0	0	40	50		Reihe des Dividenden
	7	5	4	18		Reihe des Resultats
		9	20	0	30	Reihe des Divisors
6	5	4	20	35		
	4	6	40	2	30	
			36+1	20	2	
			2	42+6	0	

Wir multiplizieren die untere Reihe mit 18 Secunden und ziehen das Resultat von der obern Reihe ab, es bleiben dort 4 Sekunden, 28 Terzen, 51 Quarten. Auf diese Weise könntest du noch genau Terzen und Quarten und weiteres ausrechnen, aber es ist nicht nötig, da man das Resultat annäherungsweise erreicht hat.

Die Weise der Division, wenn die letzte Stufe der untern Reihe zu den Stufen der Brüche gehört: Wisse, dass die Division von Brüchen durch Brüche gleicher Art die Division ganzer Zahlen ist, und die Division von Brüchen höherer Stufen ergibt Brüche der Stufe, deren Abstand von den Ganzen nach vorn so gross ist wie der Abstand des Dividendenbruchs vom Divisorbruch. Der Grund ist aus dem Vorangegangenen ersichtlich. Beispiel dafür: Dividieren wir Secunden durch Secunden, so gibt das Resultat Ganze, dividieren wir Terzen durch Secunden, so

enthält das Resultat Primen. Richte dich in ähnlichen Fällen danach.

Wenn du eine beliebige Zahl durch eine andre teilen willst, und die letzte Stufe der Divisorreihe gehört zu den Stufen der Brüche, so betrachte die letzte Stufe der Dividendenreihe. Ist sie eine höhere Stufe als die letzte der untern Reihe, so setze sie in die Stufe der untern Reihe herab, so dass die letzte Stufe der obern und der untern Reihe eben dieselbe ist. Dann teile die letzte Rubrik mit den Sechzigsteln, die vor ihr sind, nach der früheren Weise durch das zu Merkende, das Ergebnis sind ganze Zahlen. Multipliziere mit ihnen die untere Reihe und ziehe das Ergebnis von der obern ab. Teile ferner das, was als Rest in der letzten Rubrik der obern Reihe geblieben war, durch das zu Merkende, das Resultat setze in die entsprechende Rubrik, multipliziere mit ihm die untere Reihe und ziehe das Ergebnis von der obern Reihe ab. So fährst du fort, bis dir in der obern Reihe nichts mehr bleibt oder doch nur wenig. Beispiel dafür: Du willst 17 Ganze und 30 Primen und 40 Secunden durch 41 Secunden und 52 Terzen und 45 Quarten teilen. Da die letzte Stufe der untern Reihe die der Secunden ist, so setzen wir das, was nach den Secunden in der obern Reihe steht, in die Rubrik der Secunden herab, d. h. wir holen die 17 Ganzen in die Rubrik der Primen herab, dort sind sie 1020, und 30 waren dort schon, das sind 1050 Primen. Setzen wir sie in die Rubrik der Secunden herab, so gibt das 63000, 40 waren dort, das gibt 63040 Secunden, die sollen als Einer gelten. Siehe nun, in der letzten Rubrik der untern Reihe stehen 41, sie werden als Einer angesehen, und was vorher steht, gilt nach dem Früheren als $^{53}/_{60}$, daher ist das zu Merkende $41^{53}/_{60}$. Teilen wir 63040 durch $41^{53}/_{60}$, so gibt das 1505. Wir multiplizieren die untere Reihe mit 1505, das gibt 17 Ganze, 30 Primen, 28 Secunden, 8 Terzen, 45 Quarten, ziehen wir das von der obern Reihe ab, so bleiben 11 Secunden, 51 Terzen, 15 Quarten. Wir können nun, was in der letzten Rubrik der obern Reihe steht, nicht durch das zu Merkende teilen, daher setzen wir es in die Rubrik der Terzen, dort sind es $711^{15}/_{60}$, teilen wir das durch das zu Merkende, so gibt es 16, das sind Primen nach dem Obigen. Multiplizieren wir 16 Primen mit der untern Reihe und ziehen das Ergebnis von der oberen ab, so

bleiben uns in der obern Reihe 41 Terzen, 11 Quarten. Wir können nun 41 Terzen durch das zu Merkende nicht teilen, daher holen wir sie in die Rubrik der Quarten herab, dort sind dann 2471, die wir durch das zu Merkende teilen, dann haben wir 58 [55]), und zwar Secunden nach dem Vorhergehenden, multiplizieren wir die untere Reihe damit und ziehen das Ergebnis von der oberen ab, so bleiben oben 30 Sexten, 42 Quarten. Siehe, wir können nun die letzte Rubrik der obern Reihe durch das zu Merkende

								7	45
							42	0	30
						41	11		
					11	51	15		
Reihe der Dividenden		1	7	30	40				
Reihe des Resultats 1	5	0	5	16	58+1				
Reihe des Divisors					41	52	45		
		1	7	21+8	18+44+25	20+48	45		
					10	56+13	52+12		
						39	50+38	16+43	30
							41	52	45

teilen, es käme 1 heraus, und zwar 1 Secunde nach dem Vorhergehenden. Multiplizieren wir damit die untere Reihe und ziehen das Ergebnis von der oberen ab, so blieben von der oberen 7 Quinten, 45 Sexten. Wenn du wolltest könntest du noch genauer rechnen und die Quinten zu den Sexten herabholen, um durch das zu Merkende zu teilen, das Ergebnis wären Quarten nach dem Obigen, aber es ist das nicht notwendig, denn wir haben schon eine grosse Annäherung erreicht . . . . Damit ist die Auseinandersetzung über die Division einer Zahl durch eine Zahl für alle Fälle der Division beendet.

Nachdem nun die Weise der Teilung einer bekannten Zahl durch eine bekannte Zahl erläutert ist, ist es angebracht die Teilung einer bekannten Zahl durch eine unbekannte auseinanderzusetzen, wie es bei dem Aufsuchen der Quadrat- und Kubikwurzeln aus gegebenen Zahlen die Aufgabe ist. Zuerst wollen

wir diese Weise des Aufsuchens der Quadratwurzeln behandeln. Zu Grunde wollen wir der Erläuterung den Beweis des Satzes legen, dass es unmöglich ist, durch Zahlen ausdrückbare Wurzeln für die Zahlen zu finden, die nur Ganze enthalten, wenn die Wurzel nicht eine ganze Zahl ist. Das hat seinen Grund darin, dass 1 eine Quadratzahl ist. Du weisst aber schon aus dem 8. Kap. des Euklid, Satz 14, dass wenn ein Quadrat ein Mass einer andern ist, seine Seite ein Mass der Seite des andern sein muss. Nun ist 1 das Mass einer jeden Zahl, und wenn diese nun ein Quadrat ist, so muss 1 auch ein Mass für die Quadratwurzel aus der Zahl sein, wenn also 1 in der Quadratwurzel nicht als Faktor vorhanden sein soll, so kann die Zahl keine Quadratzahl sein. So ist bewiesen, dass die Zahl keine durch Zahlen ausdrückbare Quadratwurzel haben kann. Beispiel dafür: Die Quadratwurzel aus 10 ist keine ganze Zahl, weil das Quadrat von 3 gleich 9 ist und die Quadratwurzel aus 10 grösser sein muss, als die aus 9, weil 10 grösser als 9 ist. Ebenso zeigt man, dass die Quadratwurzel aus 10 kleiner als 4 sein muss, weil das Quadrat von 4 gleich 16 ist, also ist die Quadratwurzel aus 10 keine ganze Zahl. 10 enthält aber die Quadratzahl 1 als Faktor, wenn nun 10 eine Quadratzahl wäre, so müsste die Quadratwurzel daraus die Quadratwurzel aus 1, die auch gleich 1 ist, als Mass haben, das ist aber, wie bewiesen, nicht der Fall, also hat 10 keine durch eine gebrochene oder nicht gebrochene Zahl ausdrückbare Quadratwurzel, deshalb wird die Wurzel irrational[56]) genannt. Richte dich in ähnlichen Fällen danach.

Nachdem dieses beachtet ist, wollen wir dir zeigen, in welchen Stufen man aus Zahlen die Wurzeln ziehen kann, und in welchen es nicht angängig ist. Siehe, die Quadrate der Zahlenreihe von 1 bis 10 sind 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 84, 81, und da die Einheiten der Stufen in Proportion stehen und bei 1 beginnen und die der zweiten, nämlich 10, keine Quadratzahl ist, so finden sich Quadratzahlen in der ersten, dritten, fünften u. s. w. in ungeraden Stufen. Ist das beachtet, so ist es klar, dass jede Quadratzahl, die sich in einer ungeraden Rubrik befindet, eine Quadratzahl ist, weil sie die Einheit dieser Stufe, die ja eine Quadratzahl ist, so oft als Faktor enthält, wie eine Quadratzahl angibt, also

ist das Ergebnis, als das Produkt zweier Quadratzahlen, wieder eine Quadratzahl nach dem Obigen. Ebenso beweist man, dass jede Quadratzahl, die sich in einer geraden Rubrik befindet, unmöglich eine Quadratzahl sein kann. Ebenso zeigt man auch bei den Rubriken der „geometrischen Brüche“, dass die Einheiten jeder geraden Stufe Quadratzahlen sind. Das liegt daran, dass 60 keine Quadratzahl ist, also kann eine Prime keine Quadratzahl sein, weil sie 1, also eine Quadratzahl, eine durch die Zahl 60 bestimmte Anzahl von Malen enthält, 60 ist aber keine Quadratzahl, also ist eine Prime keine Quadratzahl. Wir behaupten, dass eine Sekunde eine Quadratzahl ist, denn das Verhältnis von 1 zu einer Prime ist gleich dem Verhältnis einer Prime zu einer Sekunde, also ist das Produkt einer Prime in sich selbst gleich dem Produkt aus 1 und einer Sekunde, aber dieses Produkt ist gleich einer Sekunde, also ist eine Sekunde eine Quadratzahl und ihre Wurzel ist eine Prime. So beweist man auch, dass eine Quarte eine Quadratzahl ist, denn 1 verhält sich zu einer Sekunde wie eine Sekunde zu einer Quarte, also ist das Produkt aus 1 und einer Quarte gleich dem Produkt einer Sekunde in sich selbst, also ist eine Quarte eine Quadratzahl, und ebenso zeigt man, dass die Einheiten der andern graden Stufen Quadratzahlen sind. Und daher ist es klar, dass jede Quadratzahl, die sich in einer graden Rubrik befindet, eine Quadratzahl sein muss, weil ihre Einheiten solche sind. Man kann das auch auf die Weise zeigen, auf die es Euklid bewiesen hat, denn weil 1 eine Quadratzahl ist, muss die dritte der von ihr ausgerechneten Einheiten als Glied einer geometrischen Reihe eine Quadratzahl sein, daher ist die Sekunde eine Quadratzahl, ebenso die Quarte und ebenso, was in den graden Rubriken darauf folgt.

Die Weise des Ausziehens der Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen: Es ist angebracht, dass wir uns die Zahl, deren Quadratwurzel wir suchen, in eine Reihe, nach ihren Rubriken geordnet, aufschreiben. Dann prüfe die letzte Rubrik der Reihe, ob sie ungerade oder gerade ist, und wenn sie nicht ungerade ist, setze sie in die vorhergehende herab, damit die letzte Zahl einer ungeraden Rubrik angehört. Dann suche die nächste Quadratzahl zu dieser Zahl, indessen die nächstkleinere. Die Quadratwurzel

aus ihr schreibst du in die Reihe, die für die Wurzel bestimmt ist, in die Rubrik, die in der Mitte zwischen der ersten und der letzten steht, diese Reihe werden wir die Ergebnisreihe [57]) nennen. Das Quadrat der erhaltenen Wurzel ziehe von der oberen Reihe ab, den Rest teile durch das Doppelte der gefundenen Wurzel, jedoch achte darauf, dass dir nach der Division noch so viel bleibt, wie das Quadrat der durch die Division gefundenen Wurzel beträgt, das Resultat der Division, das ist die sich ergebende [58]) Wurzel, schreibe in die Ergebnisreihe, in die Rubrik, die so weit nach rückwärts von der geteilten Rubrik absteht, wie die Rubrik des Divisors von der ersten. Multipliziere diese Wurzel, die du durch die Division erhalten hast, mit dem Doppelten der gefundenen Wurzel und mit sich selbst und ziehe das Ergebnis der Multiplikation von der oberen Reihe ab. Dann teile den Rest durch das Doppelte der bis jetzt gefundenen Wurzel, jedoch so, dass dir nach der Division noch soviel bleibt, wie das Quadrat der durch die Division sich ergebenden Wurzel beträgt, das Resultat der Division schreibe in die Reihe der Wurzel in die nach dem Obigen gehörige Rubrik. Die durch die Division sich ergebende Wurzel multipliziere mit dem Doppelten der gefundenen und mit sich selbst, das Resultat ziehe von der oberen Reihe ab, und so fährst du fort, bis dir in der oberen Reihe nichts bleibt. Beispiel dafür: Du willst die Wurzel aus 826281 ziehen. Da die letzte Stufe die achte ist, hole sie in die vorhergehende herab, da sind es 82. Nun ist 81 die nächste Quadratzahl zu dieser Zahl, ihre Wurzel ist 9, schreibe 9 in die Reihe der Wurzel in die vierte Rubrik, die mittlere zwischen der siebten und ersten. Nun ist das Quadrat von 9 der vierten Rubrik 81 der siebten, wir ziehen das von 82 ab, es bleibt uns 1 in der siebten. Das können wir aber durch das Doppelte von 9, der gefundenen Wurzel, nicht teilen, daher holen wir es in die vorhergehende Rubrik herab, mit den 6, die dort sind, gibt das 16, wir können aber 16 nicht durch 2 . 9 teilen, daher holen wir sie in die vorhergehende Rubrik herab, dort haben wir 164. Teilen wir das durch das Doppelte der gefundenen Wurzel, nämlich 18, so gibt es 9, das ist die sich ergebende Wurzel. Wir schreiben sie in die Reihe der Wurzel, in die vierte Rubrik nach rückwärts von

der Rubrik der 164. Wir multiplizieren sie mit dem Doppelten der gefundenen Wurzel und mit sich selbst, das Ergebnis ziehen wir von der oberen Reihe ab, es bleiben darin 18181. Wir teilen das durch Doppelte der gefundenen Wurzel, d. i. nach dem Vorigen 18 Einer und $^2/_{10}$, es gibt ungefähr 1 in der in der ersten Rubrik. Wir schreiben das in die Reihe der Wurzel in die erste Rubrik, multiplizieren es mit dem Doppelten der gefundenen Wurzeln und mit sich selbst und ziehen das Resultat von der oberen Reihe ab, es bleibt in der oberen Reihe nichts. Siehe, die gesuchte Wurzel dieser Zahl ist 9091, das ist das Gewünschte. Wenn du willst, kannst du die Probe darauf machen, wenn du die Reihe der Wurzel mit sich selbst multiplizierst; dann bekommst du die obere Reihe. Das[59] ist so, weil schon bewiesen ist, dass, wenn man eine Zahl zu einer Zahl addiert, das Quadrat der Summe gleich ist der Summe der Quadraten der beiden Zahlen, vermehrt um ihr doppeltes Produkt.

			1	8	1	8	1
	1	6	4	6	2	8	1
8	2	6	4	6	2	8	1
				9	0	9	1

Die Weise des Ausziehens der Quadratwurzel aus Zahlen, die nicht aus ganzen Einheiten bestehen, und in denen keine geometrischen Brüche vorkommen. Suche den Generalnenner für alle diese Brüche, d. h. das kleinste gemeinschaftliche Vielfache für die Nenner aller dieser Brüche. Mit ihm selbst, wenn er eine Quadratzahl ist, oder mit seinem Quadrat, wenn er keine solche ist, multipliziere diese Zahl, ziehe die Wurzel aus dem Ergebnis und teile sie durch die Quadratwurzel aus der Zahl, mit der du die gegebene Zahl multipliziert hast, das Resultat ist das Gewünschte. Beispiel dafür: Wenn du die Quadratwurzel aus 82 Ganzen und $^1/_4$ und $^2/_7$ eines Siebtels wissen willst, so ist der Generalnenner für alle diese Brüche, nach dem, was Euklid gezeigt, 196, das ist die aus 4 und 49 zusammengesetzte Zahl. Das sind aber Quadrate, daher ist 196 eine Quadratzahl. Wir multiplizieren die Zahl damit, das gibt 16129. Wir ziehen die Wurzel daraus, das ist 127, wir teilen sie durch die Wurzel aus 196, das ist 14, das gibt 9 Ganze und die Hälfte eines Siebtels, das ist das Gewünschte. Richte dich in ähnlichen Fällen danach. Das ist so, weil, wie schon auseinandergesetzt, bei der Multiplikation zweier Quadratzahlen mit einander die Wurzel aus dem

Ergebnis die Zahl ist, die sich aus den Wurzeln aus den beiden Quadrate zusammensetzt, also enthält das Ergebnis die eine Wurzel so oft, wie die Einheiten der andern Wurzel besagen.

Die Weise, die Quadratwurzel aus Nichtquadratzahlen mit grosser Annäherung zu ziehen, wenn in der Wurzel ganze Zahlen vorkommen: Ziehe zuerst die der wahren Wurzel aus dieser Zahl nächste Quadratwurzel auf die angegebene Weise, so dass dir in der oberen Reihe weniger als das Doppelte der gefundenen Wurzel vermehrt um 1, bleibt (das wäre das Quadrat der sich ergebenden Wurzel)[60]. Was dir bleibt, hole in die Reihe der Primen herab und teile es durch das Doppelte der ganzen Reihe der Wurzel, wenn du alles in die Rubrik der Einer setzest, achte darauf, dass dir in der oberen Reihe so viel bleibt, wie das Quadrat der sich ergebenden Wurzel beträgt. Das Ergebnis sind nach dem Obigen Primen. Multipliziere sie mit dem Doppelten der gefundenen Wurzel und mit sich selbst und ziehe das Ergebnis von der oberen Reihe ab. Und wenn der Rest weniger ist als das Doppelte der gefundenen Wurzel, vermehrt um 1, hole ihn in die vorhergehende Stufe herab und teile wieder durch das Doppelte der gefundenen Wurzel, nachdem du alle Ganzen in die Rubrik der Einer gesetzt und die Brüche, die vor ihnen stehen, als Sechzigstel betrachtet hast. Die sich ergebende Wurzel ist nach dem Obigen von der Rubrik der geteilten Brüche, dorthin schreibst du sie auch in die Resultatreihe. Multipliziere sie mit dem Doppelten der gefundenen Wurzel und mit sich selbst und ziehe das Resultat von der obern Reihe ab, auf diese Weise kannst du so genau rechnen, wie du willst. Beispiel dafür: Wenn du die Quadratwurzel aus der Zahl 7654321 und 40 Primen, 30 Secunden wissen willst, so suche die nächste Quadratwurzel auf die obige Weise, das ist 2766, es bleibt in der obern Reihe 3565 Ganze 40 Primen, 30 Secunden. Wir holen die Ganzen in die Rubrik der Primen zwar herab, dann haben wir 213940 und in der Rubrik vorher 30, und Sechzigstel. Wir teilen das Ergebnis durch das Doppelte der untern Reihe, also der gefundenen Wurzel, das beträgt 5532, so dass das Quadrat der sich ergebenden Wurzel übrig bleibt, das gibt 38, und zwar sind es Primen nach dem Obigen, dorthin schreiben wir sie in die Reihe der Wurzel. Wir multiplizieren sie mit dem Doppelten der gefundenen Wurzel und mit sich selbst und ziehen das

Resultat von der obern Reihe ab, es bleiben in der obern Reihe 61 Ganze, 40 Primen, 26 Secunden, das sind 3700 Primen, 26 Secunden. Das ist aber weniger als das Doppelte der gefundenen Wurzel, die 5533 Ganze und $^{16}|_{60}$ beträgt. Wir holen den Rest der obern Reihe in die Rubrik der Secunden, dann haben wir 222026. Wir teilen sie durch das Doppelte der gefundenen Wurzel, das gibt 40, und zwar sind es Secunden nach dem Obigen, dorthin schreiben wir sie in die Reihe der Wurzel. Wir multiplizieren sie mit dem Doppelten der gefundenen Wurzel und mit sich selbst und ziehen das Ergebnis von der oberen Reihe ab, es blieben in der oberen Reihe 11 Primen, 34 Secunden, 53 Terzen, 20 Quarten, das sind 694 Secunden, 53 Terzen, 20 Quarten, das ist weniger als das Doppelte der gefundenen Wurzel. Wir holen

							11	34	53	20
					6	1	40	26		
			3	5	6	5	40	30		
7	6	5	4	3	2	1	40	30		
			2	7	6	6	38	40	7	

daher alles in die Rubrik der Terzen, das gibt 41693 und $^{20}|_{60}$. Wir teilen das durch das Doppelte der gefundenen Wurzel, das ist 5533 $^{17}|_{60}$, das gibt 7 Terzen, wir multiplizieren sie mit dem Doppelten der gefundenen Wurzel und mit sich selbst und ziehen das Resultat von der obern Reihe ab. So finden wir, dass wir uns der gesuchten Wurzel schon genähert haben, denn der Rest in der obern Reihe ist nicht einmal eine Secunde, und das ist wenig, wenn man es mit dem vergleicht, um dessentwillen man den wahren Wert der Wurzel teilen müsste. Wenn du willst, kannst du noch genauer rechnen, aber es ist nicht nötig.

Eine andere [61]) Weise für den Fall, dass die Wurzel ganze Zahlen enthält. Wisse, dass, je grösser die Zahl ist, deren Wurzel du wissen willst, desto schwerer auch das Aufsuchen dieser Wurzel ist. Ich will dir nun zeigen, wie du aus einer grösseren Zahl eine kleinere machen kannst, nachdem ich dir zuerst auseinandergesetzt habe, dass die Multiplikation einer Zahl mit 36

Secunden gleich der Division durch 100 ist. Das ist so, denn 36 Secunden bedeutet einen Teil, von denen 100 ein Ganzes bilden, denn 1 Ganzes enthält 3600 Secunden. Und wenn dir das klar geworden ist, so teile die grosse Zahl durch 100, diese Division ist sehr leicht, so weit sie durchzuführen ist. Das, was nicht mehr geteilt werden kann, multipliziere mit 36 Secunden, das Resultat an ganzen Zahlen und Brüchen, ist die einmal herabgesetzte grosse Zahl. Ist nun diese herabgesetzte Zahl nicht weniger als 100, so setze sie auf diese Weise noch einmal herab, bis du zu weniger als 100 kommst. Die letzte herabgesetzte Zahl ist die, deren Wurzel gezogen wird. Siehe, du wirst sie mit grosser Leichtigkeit finden und wirst bis auf Quinten oder Sexten genau rechnen, damit die Rechnung eine ausserordentliche Annäherung erreicht. Und wenn du sie gefunden hast, zähle die Anzahl der Herabsetzungen und nimm die Zahl, die sich aus soviel Faktoren 10 zusammensetzt, wie die Anzahl der Herabsetzungen beträgt. Das stimmt mit der Einheit der Stufe überein, deren Zahl die Anzahl der Herabsetzungen um 1 übertrifft. Mit dem Resultat multipliziere die Wurzel, die du hast, und was sich bei der Multiplikation ergibt, ist das Gewünschte. Beispiel: Wir wollen die Wurzel aus 98754321 suchen. Wir teilen die Zahl durch 100 und den Rest multiplizieren wir mit 36 Secunden, das ergibt 987543 und 12 Primen, 36 Secunden, das ist die erste Herabsetzung. Und weil nun unser Resultat nicht kleiner als 100 ist, teilen wir diese Reihe noch einmal durch 100 und multiplizieren das, was nicht zu teilen ist, mit 36 Secunden, wir erhalten 9875 und 25 Primen, 55 Secunden, 33 Terzen, 36 Quarten, das ist die zweite Herabsetzung. Wir teilen diese Reihe, die wir erhalten haben, auf die vorige Art noch einmal durch 100 und erhalten 8 in der ersten Rubrik, 9 in der zweiten, 45 Primen, 15 Secunden, 33 Terzen, 20 Quarten, 9 Quinten, 36 Sexten. Diese Zahl ist kleiner als 100, deshalb setzen wir sie nicht weiter herunter. Die Anzahl der Herabsetzungen war 3. Wir suchen nun die Wurzel dieser kleinen Zahl, und da die letzte Rubrik der Reihe zu den graden gehörte, holen wir sie in die Vorhergehende herab, wir haben also 98 in der ersten. Die nächstkleine Quadratzahl vor dieser Zahl ist nun 81, die Wurzel daraus 9 in der ersten Rubrik. Wir schreiben 9 in die Reihe der Wurzel

in die erste Rubrik. Wir ziehen das Quadrat von 9 von 98 ab, es bleiben uns 17, die wir in die Rubrik der Primen herabholen. Das gibt nach dem Obigen 1065 und $^{15}/_{60}$. Wir teilen das durch das Doppelte der gefundenen Wurzel, das ist 18, so dass in der obern Reihe das Quadrat der sich ergebenden Wurzel übrig bleibt, das gibt 56, und zwar Primen nach dem, was oben auseinandergesetzt war. Wir schreiben sie in die Reihe der Wurzel, multiplizieren sie mit dem Doppelten der gefundenen Wurzel und mit sich selbst und ziehen das Resultat von der obern Reihe ab, es bleiben in der obern Reihe 4 Primen, 59 Secunden, und was sich daran von Brüchen anschliesst. Wir holen die Primen in die Rubrik der Secunden herunter, dann sind es 299 und $^{23}/_{60}$. Wir teilen sie durch das Doppelte der gefundenen Wurzel, das ist 19 und $^{52}/_{60}$, so dass uns das Quadrat der durch die Division sich ergebenden Wurzel bleibt, das gibt 15, und zwar Secunden. Wir multiplizieren sie mit dem Doppelten der gefundenen Wurzel und mit sich selbst und ziehen das Resultat von der obern Reihe ab, es bleibt in der obern Reihe 1 Secunde, 29 Terzen, 35 Quarten, 9 Quinten, 36 Sexten. Und wenn wir das fortsetzen, so finden wir diese Wurzel mit grosser Annäherung als 9 Ganze, 56 Primen, 15 Secunden, 9 Terzen, 30 Quarten, 26 Quinten, 52 Sexten, 52 Septimen. Die Annäherung ist von oben her zu dem Quadrat 2 Septimen, 42 Octaven, 7, 50, 35, 38, 53, 4, merke sie. Und da die Herabsetzungen 3 waren, multiplizieren wir diese Wurzel mit 1000, denn die Zahl, die sich aus 3 gleichen Faktoren 10 zusammensetzt, ist 1000. Und siehe, das Resultat ist 9938 Ganze, 37 Primen, 15 Secunden, 7 Terzen, 48 Quarten, 3 Quinten, 6 Sexten, 40 Septimen, das ist annäherungsweise die gesuchte Wurzel der Zahl. Und um die Annäherung zu beurteilen, multipliziere die erste Annäherung, die du gemerkt, mit dem Quadrat von 1000, womit du die Wurzel multipliziert hattest. Siehe die Annäherung ist von der Seite her, von der die erste Annäherung gewesen. Daher ist die erste Annäherung 9 Quarten, 46 Quinten, 18 Sexten, 32 Septimen, 0, 32, 34, 34, 4, 26, 40. Das ist eine grosse Annäherung für diese grosse Zahl, denn sie erreicht nicht einmal das Quadrat eines Viertels der Terzen. Richte dich in ähnlichen Fällen danach. Das ist so, weil die Zahl der ersten Reihe die Zahl der zweiten herabgesetzten Reihe so oft enthält

wie 100 die Einheit. Multipliziert man also die zweite Reihe mit 100, so erhält man die erste. Und ebenso beweist man, dass man die letzte herabgesetzte Reihe mit der Zahl, die aus 3 gleichen Faktoren 100 zusammengesetzt ist, das ist mit 1000000, multiplizieren muss, um die erste Reihe zu erhalten, also ist der Wert des Verhältnisses der ersten Reihe zu der letzten herabgesetzten Reihe gleich 1000000. Und ebenso verhält sich die grössere Wurzel zur kleineren wie 1000 zu 1, und der Wert des Verhältnisses des Quadrats der grösseren Wurzel zum Quadrat der kleineren ist 1000000, daher verhält sich das Quadrat der grösseren Wurzel zu dem Quadrat der kleineren wie die erste Reihe zur letzten. Vertauschen wir die inneren Glieder, so verhält sich das Quadrat der grösseren Wurzel zur ersten Reihe, wie das Quadrat der kleineren Wurzel zur letzten Reihe. Aber das Quadrat der kleineren Wurzel ist annähernd gleich der ersten Reihe. Und ebenso muss, weil das Quadrat der grösseren Wurzel sich zur ersten Reihe, wie das der kleineren Wurzel zur letzten Reihe verhält und das Quadrat der kleineren Wurzel grösser als die letzte Reihe ist, das Quadrat der grösseren Wurzel grösser als die erste Reihe sein. Und wenn wir die Differenzen bilden, so verhält sich das Quadrat der grösseren Wurzel zu der Differenz zwischen ihm und der ersten Reihe wie das Quadrat der kleineren Wurzel zur Differenz zwischen ihm und der letzten Reihe. Vertauschen wir die Glieder, so verhält sich das Quadrat der grösseren Wurzel zum Quadrat der kleineren, wie sich die Differenz zwischen dem Quadrat der grösseren Wurzel und der ersten Reihe zu der Differenz zwischen dem Quadrat der kleineren Wurzel und der letzten Reihe verhält. Der Wert des Verhältnisses des Quadrats der grösseren Wurzel zu dem der kleineren ist aber gleich 1000000, also ist der Wert des Verhältnisses der Differenz zwischen dem Quadrat der grössern Wurzel und der ersten Reihe zu der Differenz zwischen dem Quadrat der kleineren Wurzel und der letzten Reihe gleich 1000000. Richte dich in ähnlichen Fällen danach.

Die Weise des Ausziehens der Quadratwurzel aus „geometrischen Brüchen“. Sieh nach, ob die höchste aller Stufen eine grade ist. Und wenn sie nicht zu den graden gehört, hole sie

in die vorhergehende herab, damit sie grade wird. Von dem Ergebnis suche die wahre oder die angenährte, jedoch dann kleinere Wurzel, setze sie in die Reihe der Wurzel in die Rubrik in der Mitte zwischen dieser und der ersten Rubrik. Wenn du einen Rest hast, hole ihn in eine niedere Rubrik herab, bis du ihn durch das Doppelte der gefundenen Wurzel teilen kannst. Das Resultat der Division setze in die Rubrik, deren Abstand nach rückwärts von der Dividendenrubrik gleich dem Abstand der Divisorrubrik von der ersten ist. Und auf diese Weise suchst du eine Genauigkeit, so weit du willst. Beispiel dafür: Wenn du die Wurzel aus 53 Terzen, 41 Quarten, 50 Quinten, 25 Sexten wissen willst, siehe, so ist die sechste Rubrik die der Terzen, sie ist also nicht grade, hole sie herab, dann hast du 3221, die Wurzel aus der nächsten Quadratzahl ist 56, wir schreiben sie in die Rubrik in der Mitte zwischen den Einern und den Quarten, das ist in die der Secunden. Wir multiplizieren sie mit sich selbst und ziehen das Ergebnis von der obern Reihe ab, es bleiben uns 85 Quarten. Wir holen sie zu den Quinten herab und haben 5150 Quinten, teilen diese durch das Doppelte der gefundenen Wurzel, das ist durch 112, so dass uns das Quadrat der sich ergebenden Wurzel noch übrig bleibt, das ergibt 45. Und da die Stufe mit der wir geteilt die dritte von der der Einer aus gewesen, setzen wir die 45 in die Reihe der Wurzel in die dritte Rubrik nach rückwärts von der geteilten Rubrik aus, daher sind die 45 Terzen. Wir multiplizieren mit dem Doppelten der gefundenen Wurzel und mit sich selbst, ziehen das Ergebnis von der obern Reihe ab, und es bleiben uns in der oberen Reihe 76 Quinten, 50 Sexten. Wir holen die Quinten zu den Sexten herab, das gibt 4610. Wir teilen sie durch das Doppelte der gefundenen Wurzel, das ist durch $113\,^{32}/_{60}$ ungefähr, und das ergibt 33, und zwar nach den obigen Quinten. Wir multiplizieren sie mit dem Doppelten der gefundenen Wurzel und mit sich selbst und ziehen das Ergebnis von der oberen Reihe ab. Es blieben in der oberen Reihe 54 Septimen, 8 Octaven, 29 Nonen, 51 Dezimen. Und so kannst du so genau rechnen, wie du willst, aber es ist nicht nötig, noch genauer zu rechnen, da die Annäherung bis auf 1 Sexte genau ist. Richte dich in ähnlichen Fällen danach.

Die Weise, Kubrikwurzeln zu ziehen: Wir schicken der Auseinandersetzung voraus, dass einige Zahlen keine durch Zahlen ausdrückbare Kubikwurzel haben. Das ist so, denn wenn ein Würfel in einem andern enthalten ist, muss seine Seite in dessen Seite enthalten sein. Daher muss es notwendigerweise unmöglich sein, dass sich eine durch Zahlen ausdrückbare Kubikwurzel für eine ganze Zahl findet, wenn diese Wurzel keine ganze Zahl ist denn hätte sie eine durch Zahlen ausdrückbare Kubikwurzel, so wäre sie eine Kubikzahl, und da diese Zahl die 1, die eine Kubikzahl ist, als Faktor enthält, müsste ihre Kubikwurzel deren Kubikwurzel enthalten. Enthielte sie diese aber, so wäre die Wurzel eine ganze Zahl, es war aber vorausgesetzt, dass die Wurzel keine ganze Zahl wäre, also ist die Annahme falsch, also ist die Zahl keine Kubikzahl. Daher sieht man, dass weder die Zahl 10 noch die Zahl 60 eine Kubikzahl ist, und dass es unmöglich ist, die Kubikwurzel aus ihnen durch Zahlen auszudrücken. Da dieses nun klar ist, und da die Einheiten der Stufen eine geometrische Reihe bilden, die mit 1 beginnt, und 10, die Einheit der zweiten Stufe, keine Kubikzahl ist, so kann keine Einheit einer Stufe ausser der der vierten, siebten, zehnten, eine Kubikzahl sein; das sind aber die Stufen, deren um 1 verminderte Zahl ein Vielfaches von 3 ist. Ebenso zeigt man, dass unter den Rubriken der Brüche keine Stufe ist, deren Einheiten Kubikzahlen sind, ausser der dritten, sechsten, neunten, deren Zahl ein Vielfaches von 3 ist. Nun sind die Kuben der Zahlenreihe von 1 bis 9 gleich 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729. Wenn das so ist, so ist es klar, dass jede Kubikzahl, die sich in einer der Stufe befindet, deren Einheiten Kubikzahlen sind, selbst eine solche darstellt, weil sie diese Einheit, die eine Kubikzahl ist, so oft enthält wie eine Kubikzahl angibt, also ist eine Kubikzahl mit einer solchen multipliziert, daher muss das Ergebnis eine Kubikzahl sein. Ebenso beweist man, dass eine Kubikzahl, die in einer Rubrik steht, deren Einheiten keine Kubikzahlen sind, keine solche darstellen kann. Wenn dieses alles eingeprägt ist, wollen wir erläutern, wie man die Kubikwurzel aus ganzen Zahlen, die Kubikzahlen sind, findet und wie man sie annäherungsweise aus Nichtkubikzahlen zieht. Es ist richtig, dass du dir die Zahl, deren Kubikwurzel du wissen willst, in eine Reihe ent-

sprechend ihren Stufen hinschreibst. Dann sieh, ob die letzte Stufe zu den kubischen gehört; ist es nicht der Fall, so hole die Zahl in eine frühere Rubrik herab, bis sie in einer kubischen Rubrik steht. Die Zahl, die nun in dieser kubischen Rubrik ist, untersuche an Hand der Kubikzahlen, die wir erwähnt haben, und nimm die nächstkleinere Kubikzahl, ihre Wurzel kennst du, diese Wurzel schreibst du in die Reihe der Wurzel in die Rubrik, die ich dir auseinandersetzen werde. Teile nämlich die Zahl, die die Ordnung (Höhe) dieser Stufe angibt, durch 3 dann behältst du 1 übrig, addiere sie zu dem Ergebnis der Division, und in die Rubrik, die dieser Zahl entspricht, setze das Ergebnis. Beispiel dafür: Wenn die letzte Stufe die dreizehnte war, teile 13 durch 3, das gibt 4, addiere dieses zu der bei der Division übrig gebliebenen 1, das gibt 5, also setzest du das Ergebnis in die fünfte Rubrik. Das ist so, weil die Einheit der fünften Stufe, mit sich selbst multipliziert, die der neunten ergibt, und man, wenn man die neunte noch einmal mit der fünften multipliziert, die dreizehnte erhält. Richte dich in ähnlichen Fällen danach.

Ziehe die dritte Potenz der gefundenen Wurzel, von der obern Reihe ab, der Rest ist der erste Rest. Dann nimm die gefundene Wurzel, vermehrt um eine Einheit der vorangehenden Stufe, multipliziere das mit der gefundenen Wurzel und das Ergebnis mit dem dreifachen der hinzugefügten Einheit, merke dir das Ergebnis. Ist das Gemerkte weniger als der erste Rest, so teile den ersten Rest durch das Gemerkte, nur ist es nötig, dass du darauf achtest, dass dir die dritte Potenz der sich durch die Division ergebenden Wurzel übrig bleibt, und dass ferner in der obern Reihe ein Rest bleibt, der sich zu der Zahl, die du geteilt hast, so verhält, wie die um 1 verminderte, sich ergebende Wurzel zu der Summe der schon gefundenen und sich ergebenden Wurzel[62]), d. h. wenn die gefundene Wurzel 6 von einer gegebenen Stufe war und die sich ergebende Wurzel 5 von der vorhergehenden Stufe ist, so soll von dem Geteilten ein Rest bleiben, der sich zu dem Dividenden ungefähr so verhält wie 4 zu 65. Das ist beim ersten Rest sehr schwer. Jedoch von da und weiter genügt es, wenn nur ein wenig mehr als die dritte Potenz der sich ergebenden Wurzel übrig bleibt.

Und um es dir zu erleichtern, will ich dir eine schnelle Weise angeben, nach der du bei dem ersten Rest verfahren kannst. Es ist die folgende: Sieh nach, um wieviel die dritte Potenz der auf die gefundene Wurzel folgenden Zahl die dritte Potenz der gefundenen Wurzel übertrifft, mit einem Zehntel dieser Differenz teile den ersten Rest, und die sich bei der Division ergebende Wurzel besteht aus Einheiten der Stufe, die vor der Stufe der gefundenen Wurzel ist.

Nachdem du dieses, sei es auf die erste oder auf die zweite Weise, beendet hast, multipliziere die sich ergebende Wurzel mit der Summe der gefundenen und sich ergebenden Wurzel, das Resultat multipliziere mit dem Dreifachen der gefundenen Wurzel und addiere dazu die dritte Potenz der sich ergebenden Wurzel, das Resultat ziehe von dem ersten Rest ab, was dir bleibt, ist der zweite Rest [63]. Wenn der erste Rest aber auch nicht gleich dem zehnten Teil der erwähnten Zahl ist, durch die wir teilen wollten, so schliesse daraus noch nicht, dass du nicht 1 in die Stufe vor die gefundene Wurzel setzen darfst, sondern sieh nach, ob du ein Kleineres als den ersten Rest erhältst, wenn du 1 von der vorhergehenden Stufe zu der gefundenen Wurzel addierst, die Summe mit der gefundenen Wurzel multiplizierst, das gefundene Produkt mit dem Dreifachen des Hinzugefügten, d. h. der zu der gefundenen Wurzel hinzugefügten Einheit, multiplizierst und zu dem Ergebnis die dritte Potenz des Hinzugefügten addierst. Ist das kleiner als der erste Rest, so ziehe es von demselben ab und schreibe 1 in die Rubrik vor der gefundenen Wurzel; ist es grösser als der erste Rest, so hat es sich gezeigt, dass in dieser Wurzel nichts von dieser Stufe vorkommt, und du musst dasselbe mit der Einheit der vorhergehenden Stufe, der dritten, von der Stufe der gefundenen Wurzel gerechnet, vornehmen, d. h. du addierst sie zu der gegefundenen Wurzel, multiplizierst die Summe mit dem dreifachen des zu der gefundenen Wurzel Hinzugefügten und dividierst durch das Ergebnis den Rest, den du hast, so dass dir die dritte Potenz der des Quotienten und noch mehr, dem angegebenen Verhältnis entsprechend, übrig bleibt, nur dass jetzt ein kleiner Rest genügt. Der Quotient ist die sich ergebende Wurzel, schreibe sie in die Reihe der Wurzel

in die entsprechende Rubrik multipliziere die gefundene Wurzel mit der Summe der gefundenen und sich ergebenden, das Produkt mit dem Dreifachen der sich ergebenden Wurzel, addiere dazu die dritte Potenz der gefundenen Wurzel und ziehe das Resultat von dem Rest, den du hattest, ab. So kannst du genau weiter rechnen, bis du zu der gesuchten Kubikwurzel der Zahl oder nahe daran kommst.

Siehe, wir wollen die Beispiele für diese einzelnen Weisen geben. Beispiel dafür: Wir wollen in diesem Schema die Kubikwurzel aus 654321 suchen. Da die letzte Stufe keine kubische ist, setzen wir sie in eine vorhergehende herab, die eine kubische ist. Siehe die nächste Kubikzahl ist 512, die Kubikwurzel daraus 8, und da diese Rubrik die vierte ist, setzen wir die Wurzel, also 8, in die zweite. Die dritte Potenz, 512 von der vierten Rubrik, ziehen wir von 654, die wir in der vierten haben ab, es bleiben uns 142 in der vierten. Das ist mit dem, was in den übrigen Rubriken geblieben war, der erste Rest. Nach der ersten Weise multiplizieren wir nun die gefundene Wurzel, 8 von der zweiten Rubrik, mit 8 von der zweiten und 1 von der ersten, das gibt 6480. Dieses Resultat multipliziere mit dem Dreifachen einer Einheit von der ersten Stufe, die wir hinzugefügt, das gibt 19440. Wir teilen den ersten Rest durch dieses Resultat, das ergäbe 7, aber es bleiben von dem ersten Rest, nachdem wir noch die dritte Potenz von 7 abgezogen, nur 5894. Und siehe das Verhältnis dieser Zahl zu dem ersten Rest ist bedeutend kleiner als das Verhältnis von 6 der ersten Stufe zu 87 von der ersten, der Summe der gefundenen und sich ergebenden Wurzel. Denn dieses Verhältnis hat ungefähr den Wert $^1/_{14}$. Wenn wir aber als die sich aus der Division ergebende Wurzel 6 ansehen, reicht der Rest für dieses Verhältnis, d. h. für das Verhältnis von 5 zu 84, das ungefähr den Wert $^1/_{17}$ hat, weil der Rest 25850 ist, das ist mehr als der siebzehnte Teil des ersten Restes. Daher ist das Resultat 6 von der ersten, das ist die sich ergebende Wurzel. Wir multiplizieren 8 von der zweiten Stufe mit der Summe der gefundenen und der sich ergebenden Wurzel, das gibt 6880, das

1	4	2			
6	5	4	3	2	1
				8	6

multiplizieren wir mit dreimal 6 von der ersten Stufe, also dem dreifachen der sich ergebenden Wurzel, das gibt 123840. Die dritte Potenz der sich ergebenden Wurzel ist 216, das addieren wir zu dem Resultat und erhalten 124056. Wir ziehen sie von dem ersten Rest ab, es bleiben 18265. Und es ist uns klar, dass wir nicht 1 zu der Wurzel hinzufügen können, weil 1, zu 80 hinzugefügt, die dritte Potenz schon um 19441 vergrössert, und das ist schon mehr als das, was uns selbst übrig blieb. Und wenn du es dir leichter machen willst, nachdem du durch 19440 geteilt, das Resultat gefunden hast und dir 25465 nach der Subtraktion der dritten Potenz geblieben waren, so multipliziere die gefundene Wurzel mit dem Produkt aus der um 1 verminderten sich ergebenden Wurzel in das Dreifache der sich ergebenden Wurzel, das Resultat ziehe von 25465 ab, so hast du das Gewünschte. Beispiel dafür: Du multiplizierst 80 mit 518, das gibt 7200, ziehe das von 25465 ab, so bleibt 18265, das stimmt mit dem früher gefundenen Rest überein.

Dadurch wird dir auch der Grund klar werden, aus dem ich dir gesagt, du solltest darauf achten, dass dir das erwähnte Verhältnis übrig bleibt. Das ist so, weil das Produkt 80 . 81 mit 3 multipliziert wurde, das Ergebnis dann mit 6, das ist aber gleich dem Produkt aus 81 in das Produkt 18 . 80. Und das ist einleuchtend,, dass die Summe des Produkts 81 . (80 . 18) und des Produkts 5 . (80 . 18) gleich dem Produkt 86 . (80 . 18), das wir suchten, ist. Richte dich in ähnlichen Fällen danach.

Wenn wir die zweite Weise angewendet hätten, die für die annähernde Berechnung leichter ist, so hätten wir den Rest 142321 durch der zehnten Teil der Differenz zwischen der dritten Potenz von 9 in der zweiten Stufe — der auf die gefundene Wurzel folgenden Zahl — und der dritten Potenz, von 8 in der zweiten Stufe geteilt. Diese Differenz ist 217000, der zehnte Teil ist 217 Zehntel, also 21700. Teilen wir den Rest durch 21700, so bekommen wir 6 Ganze, das ist die sich ergebende Wurzel. Wir multiplizieren die gefundene Wurzel, nämlich 80, mit der Summe der gefundenen und sich ergebenden Wurzel, das gibt 6880; wir multiplizieren das mit dem Dreifachen der sich ergebenden Wurzel, das gibt 123840, dazu addieren wir die dritte Potenz der sich ergebenden Wurzel, nämlich 216, das gibt

124056, das ziehen wir von der obern Reihe ab, es bleiben 18265, das ist der zweite Rest. Richte dich in ähnlichen Fällen danach.

Nun sieh bei diesem zweiten Rest, indem du eine Prime, die der Stufe vor der gefundenen Wurzel, nämlich 86, entspricht, hinzufügst, wieviel die dritte Potenz grösser wird, merke dir das Ergebnis. Teile den zweiten Rest durch das Ergebnis, achte darauf, dass dir die dritte Potenz der sich ergebenden Wurzel und das Produkt aus der um 1 verminderten sich ergebenden Wurzel in das Produkt aus der gefundenen Wurzel in das Dreifache der sich ergebenden übrig bleibt. Wir multiplizieren 86, die gefundene Wurzel, mit 86+1 Prime und das Ergebnis mit 3 Primen, das gibt 369 Ganze, 52 Primen, 18 Secunden. Wir teilen den zweiten Rest durch das Ergebnis, das gibt 49 und zwar Primen, aber es bleibt uns von dem zweiten Rest nicht so viel, wie der Wert des Verhältnisses von 48 Primen zu 86 Ganzen, 49 Primen, der ungefähr $^1/_{149}$ ist, denn der Rest ist ungefähr 140 Ganze und das ist weniger als der 149te Teil des zweiten Restes. Daher schreiben wir in die Reihe der Wurzel nur 48 Primen denn dann reicht uns jener Rest für das erwähnte Verhältnis. Wir multiplizieren 86 mit 86 Ganzen und 48 Primen, das Ergebnis dann mit dem Dreifachen von 48 Primen, das gibt 17916 Ganze, 31 Primen, 12 Secunden. Wir addieren dazu die dritte Potenz von 48 Primen, der sich ergebenden Wurzel, das gibt 30 Primen, 43 Secunden, 12 Terzen. Wir ziehen das Resultat von dem zweiten Rest ab, es bleiben 348 Ganze, 58 Primen, 4 Secunden, 48 Terzen. Nun prüfen wir, indem wir eine Secunde zu der gefundenen Wurzel addieren, wieviel die dritte Potenz grösser wird. Wir multiplizieren 86 Ganze, 48 Primen, 1 Secunde, mit 86 Ganzen, 48 Primen, und multiplizieren das Resultat mit 3 Secunden, das gibt annähernd 6 Ganze, 17 Primen, das merke, denn du wirst von nun an keine weitere Prüfung mehr nötig haben, denn der Wert des Verhältnisses der sich ergebenden Wurzel zu der gefundenen, wird klein sein. Wir teilen den Rest durch dieses Gemerkte, das gibt 55, und zwar Secunden. Wir multiplizieren 86 Ganze, 48 Primen, 55 Secunden mit 86 Ganzen, 48 Primen und das Resultat mit dem Dreifachen von 55 Secunden, dazu addieren wir die dritte Potenz von 55 Secunden, das gibt 345

Ganze, 22 Primen, 48 Secunden, 29 Terzen, 16 Quarten, 12 Quinten, 55 Sexten. Ziehen wir das von dem Rest ab so bleiben 3 Ganze, 35 Primen, 16 Secunden, 18 Terzen, 43 Quarten, 47 Quinten, 5 Sexten. Wir teilen durch $^1/_{60}$ der Gemerkten, das ist gleich 6 Primen, 17 Secunden, das ist das zweite zu Merkende, das gibt 34, und zwar Terzen, denn die Terz ist der sechzigste Teil der Secunden, eine Secunde Vermehrung hatte ja annähernd 6 Ganze, 17 Primen Vergrösserung der dritten Potenz gebracht. Multiplizieren wir die gefundene Wurzel, also 86 Ganze, 48 Primen, 55 Secunden mit 86 Ganzen, 48 Primen, 55 Secunden, 34 Terzen und das Ergebnis mit dem Dreifachen von 34 Terzen, und addieren die dritte Potenz von 34 Terzen, so gibt das 3 Ganze, 33 Primen, 32 Secunden, 44 Terzen, 25 Quarten, 27 Quinten, 38 Sexten, 3 Septimen, 55 Octaven, 4 Nonen. Ziehen wir das von dem Rest ab, so bleibt 1 Prime, 43, 34, 18, 19, 26, 56, 4, 56.

Wir teilen nun durch den sechzigsten Teil des zweiten Gemerkten, das sind 6 Secunden, 17 Terzen, das ist das an dritter Stelle zu Merkende, das gibt 16, nämlich Quarten. Man braucht jedoch nicht genauer zu rechnen, wolltest du es aber, so könntest du auf diesem Wege so weit gehen, wie du willst. Siehe die gesuchte Kubikwurzel dieser Zahl ist 86 Ganze, 48 Primen, 55 Secunden, 34 Terzen, 16 Quarten. Für den zweiten Weg, den ich dir bei dem ersten Rest gegeben, ist es angebracht, für den Fall, dass die Rubrik vor der gefundenen Wurzel einen Bruch darstellt, dass du die Differenz zwischen der dritten Potenz der auf die gefundene Wurzel folgenden Zahl und der der gefundenen Wurzel durch 60 teilst, das ist sehr einleuchtend.

[64]) Eine andere Weise, die Kubikwurzel einer gegebenen Zahl, wenn ganze Zahlen darin vorkommen, zu suchen; Wisse, dass es sehr leicht ist, für Zahlen, die kleiner als 1000 sind, die Kubikwurzel zu ziehen, wenigstens im Verhältnis zu dem, was grösser ist. Nun will ich dir zeigen, wie du eine grosse Zahl auf eine kleine zurückführen kannst, nachdem ich dir vorher gezeigt, dass die Multiplikation einer Zahl mit 3 Secunden und 36 Terzen gleich der Division derselben durch 1000 ist. Denn tausendmal 3 Secunden und 36 Terzen ist gleich einem Ganzen, also sind 3 Secunden, 36 Terzen der tausendste Teil eines Ganzen. Wenn das beachtet ist, so ist es richtig, dass du die Zahl durch 1000

teilst und den Rest, der nicht geteilt werden konnte, multiplizierst du mit 3 Secunden und 36 Terzen, das ist die erste Herabsetzung. Ist das Resultat nicht kleiner als 1000, so teilst du es auf die vorige Art nochmals durch 1000, das ist die zweite Herabsetzung. Und so hörst du nicht auf, durch 1000 zu teilen, bis die Zahl kleiner als 1000 ist. Dann zählst du die Zahl der Herabsetzungen, ziehst die Wurzel aus der kleinen Zahl und rechnest sehr genau bis zu den Sexten, oder soweit du willst, denn auf diese Weise ist das sehr leicht. Das Ergebnis multiplizierst du mit der Zahl, die aus so viel Faktoren 10 gebildet ist, wie die Anzahl der Herabsetzungen betrug, diese Zahl stimmt mit der Einheit der Stufe überein, deren Ordnung die Anzahl der Herabsetzungen um 1 übertrifft, so hast du das Gewünschte. Beispiel dafür: Wenn du die Wurzel aus 5987654321 ziehen willst, wirst du sie hier dreimal herabsetzen, damit die Zahl, die du zuletzt erhältst, kleiner als 1000 ist. Und siehe die Zahl, die du zuletzt erhältst, ist 5 Ganze, 59 Primen, 15 Secunden, 33 Terzen, 7 Quarten, 54 Quinten, 33 Septimen, 34 Octaven, 36 Nonen.

Und siehe, die Kubikzahl, die dem am nächsten ist, was in der letzten Rubrik steht, die eine kubische ist, ist 1, die Kubikwurzel daraus ist 1. Schreibe 1 in die Reihe der Wurzel. Ziehe seine dritte Potenz von der obern Reihe ab, es bleiben 4 Ganze, 59 Primen, und was noch an Brüchen folgt. Du weisst nun, dass die dritte Potenz von 2 die von 1 um 7 übertrifft, die Rubrik vor der gefundenen Wurzel gehört aber zu den Brüchen. Teilst du den Rest in der obern Reihe durch $^1/_{60}$ von 7 Ganzen, das sind 7 Primen, so gibt das 42, das sind Sechzigstel eines Ganzen, daher also Primen. Multipliziere die gefundene Wurzel, also 1, mit 1 und 42 Primen, das Ergebnis mit dem Dreifachen der sich ergebenden Wurzel, das sind 42 Primen, addiere dazu die dritte Potenz von 42 Primen, der sich ergebenden Wurzel, so gibt das 3 Ganze, 42 Primen, 8 Terzen. Wir ziehen das von dem Rest ab, es bleibt 1 Ganzes, 17 Primen, 15 Secunden, 25 Terzen, 7 Quarten, 54 Quinten, 34 Septimen, 33 Octaven, 36 Nonen. Siehe, jetzt sollten wir prüfen, was die Hinzufügung einer Prime für die dritte Potenz ausmacht. Wir multiplizieren die gefundene Wurzel, 1 Ganzes, 42 Primen, mit 1 Ganzen, 43 Primen, das Resultat mit dem Dreifachen des Addierten, also einer Prime.

Das gibt ungefähr 8 Primen, 46 Secunden. Wir teilen den Rest damit, das gibt 8, und zwar Primen. Wir addieren zu der gefundenen Wurzel 8 Primen, multiplizieren 1 Ganzes und 42 Primen mit 1 Ganzen und 50 Primen, das Resultat mit 24 Primen, das ist das Dreifache der sich ergebenden Wurzel, die ja 8 Primen war, addieren dazu die dritte Potenz von 8 Primen, das gibt 1 Ganzes, 14 Primen, 56 Secunden, 32 Terzen. Wir ziehen das von dem Rest ab, es bleiben 2 Primen, 18 Secunden, 53, 7, 0, 54, 34, 33, 36. Der Rest ist weniger als das was die Addition einer Prime für die dritte Potenz ausmacht.

Nun müssen wir sehen, was die Hinzufügung einer Secunde für die dritte Potenz ausmacht. Wir multiplizieren die gefundene Wurzel, 1 und 50 Primen, mit 1 und 50 Primen und 1 Secunde, das Ergebnis mit dem Dreifachen des Hinzugefügten, also einer Secunde, das gibt ungefähr 10 Secunden und 40 Terzen. Das ist das erste zu Merkende. Teile den Rest damit, das gibt 13. Multipliziere 1 und 50 Primen mit 1, 50 Primen und 13 Secunden, das Ergebnis mit dem Dreifachen der sich ergebenden Wurzel, die 13 Secunden beträgt, das gibt 2 Primen, 11, 20, 30, 6, 37. Wir ziehen das von dem Rest ab, es bleiben 7 Secunden, 32, 37, 47, 23, 34, 33, 36. Wir teilen diesen Rest durch $^1/_{60}$ der ersten zu Merkenden, das sind 10 Terzen und 40 Quarten, das ist das zweite zu Merkende, das gibt 44, und zwar Terzen. Wir multiplizieren 1, 50 Primen, 13 Secunden mit 1, 50 Primen, 13 Secunden, 44 Terzen, das Ergebnis mit dem Dreifachen der sich ergebenden Wurzel, also von 44 Terzen, addieren dazu die dritte Potenz von 44 Terzen, das gibt 7 Secunden, 25 Terzen, 26, 58, 1, 50, 53, 44. Das ziehen wir von dem Rest ab, es bleiben 7 Terzen 9, 51, 22, 24, 59, 52. Wir teilen den Rest durch $^1/_{60}$ des zweiten zu Merkenden, nämlich 10 Quarten und 7 Quinten, ungefähr, das ist das dritte zu Merkende, das gibt 42 Quarten. Wir multiplizieren 1, 50 Primen, 13 Secunden, 44 Terzen mit 1, 50 Primen, 13 Secunden, 44 Terzen und 42 Quarten, das Ergebnis mit dem Dreifachen der sich ergebenden Wurzel, addieren dazu die dritte Potenz von 42 Quarten, das gibt 7 Terzen, 5, 15, 24, 16, 21, 13, 22, 48, das ziehen wir von dem Rest ab, es bleiben 4 Quarten, 35 Quinten, 28, 18, 23, 34, 46, 37 12. Genauer braucht man nicht zu rechnen. Wenn du wolltest könntest du noch

2 Rubriken genauer rechnen und wärest dem Gesuchten sehr nah.

Denn wenn du den Rest durch $^1/_{60}$ des dritten Gemerkten teilst, also durch 10 Quinten, 16 Sexten, so kommt 40 heraus, und das sind Quinten, ferner 16, nämlich Sexten. Und wenn du untersuchst, so findest du, dass die Annäherung kleiner als $^2/_3$ eines Fünftels ist. Daher ist die Kubikwurzel dieser herabgesetzten Zahl 1 Ganzes, 50 Primen, 13 Secunden, 44, 42, 40, 16. Wir multiplizieren diese Wurzel mit 1000, weil die Herabsetzungen 3 waren, das gibt 1833 Ganze, 9 Primen, 5 Secunden, 7 Terzen, 34 Quarten, 40 Quinten, 40 Sexten. Man beweist nun wie oben, als die Zahl zur Aufsuchung der Quadratwurzel herabgesetzt wurde, dass dieses die angenährte Kubikwurzel der grossen Zahl ist, und dass das Verhältnis der Nährungswerte gleich dem Verhältnis der einen Zahl zur andern ist, d. h. den Wert 1000000000 hat, denn die grosse Zahl enthält die kleine tausend Millionenmal, denn das Verhältnis eines Würfels zu einem Würfel ist das Verhältnis der Seiten, dreimal mit sich multipliziert. Und wenn du das so machst, wird es dir auf eben dieselbe Weise klar werden, dass das Verhältnis der Annäherung der dritten Potenz der grossen Wurzel an die grosse Zahl zu der Annäherung der dritten Potenz der kleinen Wurzel an die kleine Zahl auch den Wert 1000000000 hat.

Die Weise, die Kubikwurzel aus einer gegebenen Kubikzahl zu ziehen, die nicht nur Ganze und keine „geometrischen Brüche“ enthält. Suche den Generalnenner aller Brüche, wenn es keine Kubikzahl ist, so multipliziere die Zahl mit der dritten Potenz des Generalnenners oder mit ihm selbst, wenn er eine Kubikzahl ist. Aus dem Ergebnis ziehst du die Kubikwurzel, das Resultat teilst du durch die Grundzahl der dritten Potenz, mit der du die Zahl multipliziert hast. Das gibt das Gewünschte.

[65]) Beispiel dafür: Du willst die Kubikzahl aus 44 Ganzen, $^5/_7$ eines Viertels, $^3/_7$ eines Siebtels eines Viertels eines Viertels und $^{27}/_7$ eines Siebtels eines Viertels eines Viertels wissen. Wir suchen den Generalnenner für diese Brüche und Doppelbrüche, er ist aus den Zahlen, 7, 7, 7, 4, 4, 4, zusammengesetzte Zahl, das ist dasselbe wie die durch Multiplikation der dritten Potenz von 7 und der von 4 entstandene Zahl. Also ist der Generalnenner

eine Kubikzahl, seine Kubikwurzel ist 7 . 4, also 28. Wir multiplizieren 44 und die Brüche mit dem Generalnenner und ziehen die Wurzel, das gibt 99, wir teilen 99 durch 28, das gibt 3 Ganze und 15 Teile, von denen 28 ein Ganzes sind.

Die Weise, die Kubikwurzel aus gegebenen „geometrischen Brüchen" zu ziehen: Sieh zuerst nach, ob die letzte Stufe der Reihe eine kubische ist, ist sie es nicht, so setze diese Rubrik so lange vorwärts, bis sie in eine kubische kommt. Dann ziehst du die nächstkleinere Kubikwurzel aus der Zahl, die du in dieser Rubrik hast, und setzest das Resultat in die Rubrik, die oben genannt ist, d. h. du teilst die Ordnung der Stufe[66]) (die Niedrigkeit der Stufe) durch 3, dorthin setzest du das Resultat. Beispiel dafür: Wenn die Rubrik die der Sexten war und du teilst die Ordnung der Rubrik durch 3, so gibt das 2, daher setzest du das Ergebnis in die Rubrik der Secunden, denn multipliziert man Secunden mit Secunden, so erhält man Quarten, und Quarten mit Secunden multipliziert, geben Sexten. Dann bildest du die dritte Potenz der gefundenen Wurzel und ziehst sie von der obern Reihe ab, den Rest untersuchst du darauf, wie viel die dritte Potenz grösser wird, wenn du der Wurzel eins von der vorangehenden Rubrik hinzufügst. Mit dem Resultat teile nämlich den Rest, so dass dir noch die dritte Potenz der sich ergebenden Wurzel und eine Zahl übrig bleibt, die sich zu der geteilten Zahl, wie die um 1 verminderte sich ergebende Wurzel zu der Summe der gefundenen und sich ergebenden Wurzel verhält, kurz du verfährst gänzlich nach der früheren Weise.

Beispiel dafür: Du willst die Kubikwurzel aus 59 Primen, 23 Secunden, 7 Terzen, 40 Quarten wissen. Hole die Primen und Secunden zu den Terzen herab dort sind es 213787. Wir ziehen die nächste Kubikwurzel, das ist 59, und zwar Primen nach dem Obigen. Der Rest ist 8408 Terzen, 40 Quarten. Wir müssen nun prüfen, was die Vermehrung der Zahl um 1 Secunde für die dritte Potenz ausmacht. Wir multiplizieren 59 Primen mit 59 Primen und 1 Secunde, das Ergebnis mit 3 Secunden, das gibt ungefähr 2 Secunden, 54 Terzen, dadurch teilen wir den Rest, die bei der Teilung sich ergebende Wurzel ist 47, und zwar Secunden. Geblieben ist noch genügend für das Verhältnis von 46 Secunden zu 59 Primen 46 Secunden, das ungefähr $^1/_{78}$

ist. Wir multiplizieren 59 Primen mit 59 Primen, 47 Secunden, das Ergebnis mit dem Dreifachen von 47 Secunden und addieren dazu die dritte Potenz von 47 Sekunden, das gibt 2 Primen, 18 Secunden, 9, 26, 23, 23; das ziehen wir von dem Rest ab, es bleiben 119 Terzen, 13 Quarten, 36 Quinten, 37 Sexten. Wir müssten nun prüfen, was die Vermehrung um 1 Terz für die dritte Potenz ausmacht, aber wir brauchen es nicht mehr zu tun, weil das Verhältnis zu der Wurzel so klein ist. Siehe wir erhalten ungefähr 2 Terzen, 45 Quarten, das ist das erste zu Merkende. Die sich ergebende Wurzel ist 40, und zwar Terzen. Wir multiplizieren 59 Primen, 47 Secunden mit 59 Primen, 47 Secunden, 40 Terzen, das Ergebnis mit dem Dreifachen von 40 Terzen und addieren dazu die dritte Potenz von 40 Terzen, das gibt 119 Terzen, 9 Quarten, 25, 2, 57, 46, 40, das ziehen wir von dem Rest ab, es bleiben 4 Quarten, 11, 20, 13, 20.

Die Weise, zwei Zahlen, zwischen zwei angegebenen verschiedenen Zahlen zu finden, so dass sie mittlere Proportionalen sind. Teile die grössere durch die kleinere, ziehe aus dem Quotienten die dritte Wurzel, das ist das erste Zwischenresultat. Suche auch das Quadrat der dritten Wurzel, das ist das zweite Zwischenresultat. Multipliziere das erste Zwischenresultat mit der kleineren Zahl, so erhältst du die Zahl, die zu der kleineren Zahl in dem gewünschten Verhältnis steht. Multipliziere das zweite Zwischenresultat mit der kleineren Zahl, so erhältst du die dritte Zahl, die in dem gewünschten Verhältnis zu der kleineren Zahl steht.

[67]) Beispiel dafür: Wenn wir zwei solche mittleren Proportionalen zwischen 15 und 25 finden wollen, so teile 25 durch 15, das gibt 1 Ganzes 40 Primen. Suche die Kubikwurzel daraus, das gibt 1 Ganzes, 11 Primen, 8 Secunden, 11 Terzen, 19 Quarten, 4 Quinten, 30 Sexten. Das ist das erste Zwischenresultat. Das Quadrat des ersten Zwischenresultats ist nun 1 Ganzes, 24 Primen, 20, 35, 45, 34, 10, 28, 27, 51, 20, 15. Das ist das zweite Zwischenresultat. Wir multiplizieren das erste Zwischenresultat mit 15, das gibt 17 Ganze, 47 Primen, 4, 4, 46, 7, 30. Das ist die zweite Zahl nach 15. Wir multiplizieren das zweite Zwischenresultat mit 15, das gibt 21 Ganze, 5, 8, 56, 23, 32, 37, 6, 57, 3, 45, das ist die dritte Zahl von der Zahl 15 aus,

Behauptung: Diese Zahlen sind als stetige Proportion zwischen 15 und 25 eingeschaltet. Das ist so, denn zwischen 1 und die dritte Potenz jeder Zahl fallen zwei solcher Zahlen, die eine stetige Proportion herstellen, die eine von ihnen ist die Kubikwurzel, die andere ihr Quadrat. Denn 1 verhält sich zu der Kubikwurzel, wie diese zu ihrem Quadrat und wie das Quadrat zur dritten Potenz. Wir haben aber diese Zahlen mit denselben Faktoren multipliziert, denn 1, mit 15 multipliziert, gibt 15, die dritte Potenz der Wurzel, mit 15 multipliziert, gibt 25, und die beiden mittleren Zahlen sind auch mit 15 multipliziert, Also stehen diese 4 Zahlen, die mit 15 multipliziert sind, auch in demselben Verhältnis.

Sechstes Kapitel:
Von den Proportionen, das ist das Vergleichen von Zahlen miteinander.

Du weisst schon, dass, wenn 4 Zahlen in Proportion stehen das Produkt aus der ersten in die vierte gleich deren Produkt aus der zweiten in die dritte ist. Und wenn das so ist, so werden wir dir auseinandersetzen, wenn irgend welche Zahlen gegeben sind und wir eine zweite Zahl haben, die einer von dieser Zahlen entspricht, wie du die übrigen entsprechenden Zahlen finden kannst, so dass die entsprechenden Zahlen in eben diesem früheren Verhältnis stehen. Du musst wissen, dass, wenn du eine von den Zahlen mit der gegebenen zweiten Zahl multiplizierst und durch die ihr entsprechenden dividierst, du die entsprechende Zahl für die Zahl findest, welche mit der gegebenen zweiten multipliziert wurde. Beispiel dafür: Die gegebenen Zahlen seien a, b, c, d, h, und die Zahl s soll d entsprechen. Wir wollen nun die entsprechenden Zahlen für a, b, c, h finden. Siehe: Wir multiplizieren s mit a und dividieren durch d. Wir erhalten k. Da nun $s \cdot a = k \cdot d$ ist, verhalte sich a zu d wie k zu s. Vertauschen wir die Glieder, so verhält sich a zu k wie d zu s. Ebenso beweist man, wenn man b mit s multipliziert und durch d teilt und das Ergebnis t ist, dass t die entsprechende Zahl zu b ist. Ebenso multipliziere man c mit s und teile durch d, das gebe g, so entspricht g dem c. Endlich multipliziere man h mit s und teile durch d, das gebe l, so entspricht l der Zahl h.

Siehe, so haben wir die entsprechenden Zahlen zu a, b, c, d, h gefunden, es sind k, t, g, s, l. Klar ist es, dass die Zahlen k, t, g, s, l in demselben Verhältnis wie a, b, c, d, h stehen, w. z. b. w.

Auch wenn uns keine Zahl aus der Reihe der entsprechenden Glieder bekannt ist, wenn wir aber die Summe von zweien oder dreien von ihnen kenne, so ist es möglich, die entsprechenden Zahlen zu finden. Beispiel: Wir mögen aus unserem früheren Beispiele wissen, dass die Summe (k+s+l) gleich m ist, und wir wollen daraus die entsprechenden Zahlen für die gegebenen a, b, c, d, h finden. Siehe, dann setzen wir die Summe der k, s, l entsprechenden Glieder, das sind a, d, h, gleich n und dem Verhältnisse n zu m setzen wir das Verhältnis jedes der Zahlen a, b, c, d, h zu der entsprechenden gleich. Deshalb multiplizieren wir m mit a und teilen durch n, so erhalten wir k. Auf dieselbe Weise finden wir die Zahlen t, g, s, l. Behauptung: k, t, g, s, l sind die gewünschten Zahlen. Beweis: n verhält sich zu m wie a zu k und wie d zu s und wie h zu l. Addieren wir, so verhält sich n zu m wie (a+d+h) zu (k+s+l). Vertauschen wir die Glieder, so verhält sich n zu (a+d+h) wie m zu (k+s+l). n war aber gleich (a+d+h), also ist m gleich (k+s+l). Also haben wir schon die entsprechenden Glieder zu a, b, c, d, h gefunden, und die Summe von k, s und l aus ihrer Reihe ist gleich der gegebenen Zahl m. Und auch, wenn uns von den entsprechenden Gliedern nur bekannt ist, dass die Differenz zwischen einer Zahl, deren entsprechende Stellung bekannt ist, oder einer Summe von Zahlen, deren entsprechende Stellung bekannt ist, und irgend einer Zahl oder einer Summe von Zahlen gleich einer gegebenen Zahl ist, so können wir dadurch schon die entsprechenden Glieder, ein jedes an seiner Stelle, finden. Beispiel dafür aus unserem früheren Beispiel: Wir mögen wissen, dass die Summe der Zahlen b und g die Zahl l und m übertrifft, und wenn wir daraus die entsprechenden Glieder zu a, b, c, d, h finden wollen, so setzen wir (a+c) gleich n. Zuerst beweisen wir, dass n grösser ist als h, denn weil das bekannte a sich zu dem unbekannten k verhält wie das bekannte c zu dem unbekannten g und wie h zu dem unbekannten l, so verhält sich (a+c) zu h wie (k+g) zu l. Aber (k+g) ist grösser als l, also ist (a+c) grösser als h. Wir setzen

un die Differenz zwischen n und h gleich x, multiplizieren a mit m und teilen durch x, so erhalten wir k als die entsprechende Zahl zu a, und so hören wir nicht auf, bis wir die Zahlen k, t, g, s, l gefunden haben. Wir wollen nun beweisen, dass k. t, g, s, l. die gewünschten Zahlen sind. Beweis: x verhält sich zu m wie jede Zahl aus der Reihe a, b, c, d, h zu der entsprechenden, also verhält sich a+c zu k+g wie h zu l. Bilden wir die Differenzen, so verhält sich x zu h wie die Differenz zwischen k+g und l zu l. Vertauschen wir die Glieder, so verhält sich x zu der Differenz zwischen k+g und l wie h zu l. Da sich nun x zu m wie h zu l verhält, ist die Differenz zwischen k+g und l gleich m. Also sind die Zahlen k, t, g, s, l die entsprechende zu a, b, c, d, h, und die Differenz zwischen k+g und l ist m, w. z. b. w.

Auch, wenn uns von den entsprechenden unbekannten Gliedern nur bekannt ist, dass eine Zahl, deren entsprechende Stellung man weiss, oder eine Summe von Zahlen, deren entsprechende Stellung man weiss, einen Teil oder Teile von Zahlen, deren Stellung man kennt, um eine gewisse Grösse übertrifft, so können wir dadurch schon die entsprechenden Zahlen zu den gegebenen finden. Es sei in unserem Beispiel bekannt, dass t gewisse gegebene Teile der Summe k+s um m übertrifft, siehe, so setzen wir dieselben Teile der Summe a+d gleich n und beweisen, dass b grösser ist als n. Denn das bekannte b verhält sich zu dem unbekannten t wie das bekannte a zu dem unbekannten k. Also verhält sich b zu t wie a+d zu k+s. Aber a+d verhält sich zu k+s wie n zu den gegebenen Teilen von k+s, die wir mit x bezeichnen [68]) denn das ist ja klar, dass a+d sich zu n wie k+s zu diesen gegebenen Teilen von k+s verhält. Vertauschen wir die Glieder, so zeigt sich die Richtigkeit unserer Behauptung. Also verhält sich b zu t wie n zu den gegebenen Teilen von k+s. Vertauschen wir die Glieder, so verhält sich b zu n wie t zu den gegebenen Teilen von k+s. t ist aber grösser als diese Teile, also ist b grösser als n. Sei die Differenz zwischen ihm und n gleich e. Wir multiplizieren a mit m und teilen durch e, so bekommen wir k, das a entspricht. Und so hören wir nicht auf, bis wir die Zahlen k, t, g, s, l gefunden haben. Wir behaupten nun, dass k, t, g, s, l die gesuchten Zahlen sind. Beweis: e verhält sich zu m wie jede der Zahlen a, b, c,

d, h zu der entsprechenden. Also verhält sich e zu m wie a+d zu k+s und wie b zu t. Siehe, weil sich n zu a+d verhält wie x zu k+s, verhält sich n zu x wie a+d zu k+s durch Vertauschung der Glieder. Aber a+d verhält sich zu k+s wie b zu t, also verhält sich n zu x wie b zu t. Vertauschen wir und kehren wir um, so verhält sich b zu n wie t zu x. Aber b war um e grösser als n, also muss t grösser sein als x. Nun verhielt sich b zu e wie t zu m durch Vertauschung der inneren Glieder. Also ist die Differenz zwischen t und x gleich m. Also sind die Zahlen k, t, g, s, l die entsprechenden zu a, b, c, d, h, und die Differenz zwischen t und den gegebenen Teilen von k+s ist m, w. z. b. w.

Es schreibt der Verfasser: Das sechste Kapitel dieses Abschnitts ist beendet und damit dieses ganze Buch. Der Ruhm sei Gott allein!

Der Schluss war am Anfang Nissan des einundachtzigsten Jahres des sechsten Jahrtausends, als ich das dreiunddreissigste meiner Lebensjahre erreicht hatte. Gelobt sei der Helfer!

Anmerkungen.

1) Der Text מעשה חושב enthält ein Wortspiel, das sich im Deutschen nicht wieder geben lässt. חשב hat die Grundbedeutung knüpfen, dann heisst es denken, auch rechnen. מעשה חושב enthält sogleich den Gegensatz „Theorie und Praxis“ und den Begriff „Praxis des Rechners“, vgl. Exodus 28,6.

2) In M. I und M. II lautet der Text העיון למעשה. Wohl veranlasst durch die vorhergehenden Ausführungen der Einleitung, in denen betont wird, dass die Kenntnis der Theorie für die Praxis von Nutzen sei, aber wohl auch wegen der eigentümlichen Stellung der Worte למעין בו — man hätte erwartet הנה ראוי למעין בו שיקדם העיון — hat der Abschreiber das למעין in למעשה verwandelt, den Worten den Sinn gebend: „Die Theorie solle der Praxis vorausgehen“. Der Zusammenhang gestattet aber nur die Lesart W. als richtig anzunehmen. J. a. scheinen M. II und W. aus gleicher Quelle herzurühren, wie man sich leicht überzeugt, während M I unabhängig zu sein scheint.

3) להשיב. Gewöhnlich ist השב widerlegen, hier muss der Sinn sein „zu wiederholen“, vgl. dazu וישב משה את דברי העם Exodus 19.

4) Die genannten Summen $(1+2+\cdot\cdot\cdot\cdot n)+(2+3+\cdot\cdot+n)$, und $\cdot\cdot\cdot\cdot+.\ [(n-1)+n]+n$, für $\overset{p}{\underset{0}{n}}$, sind in anderer Form die archimedische Reihe der Quadratzahlen. Zu der vorangehenden Definition sei noch bemerkt, dass im 2ten Abschnitt der Ausdruck נמשכים בזולת דרך המספר nicht für die allgemeine arithmetische Reihe gebraucht wird, sondern für solche Reihen, deren Anfangsglied gleich der Reihendifferenz ist, der Ausdruck ist weiterhin immer mit „nicht natürliche Reihe“ übersetzt, weil er gewöhnlich im Gegensatz zu נמשכים בדרך המספר steht.

5) Diese Reihensummen sind die figurierten Zahlen, die unter dem Namen Dreieckszahlen bekannt sind.

6) Eins als benannte Zahl ist die „Zahl“ Eins. Eins als unbenannte Zahl ist die „Einheit“. Der Begriff Einheit kann allerdings den Begriff der Teilung nicht vertragen. Durch die Vermischung der beiden Begriffe ist es wohl gekommen, dass man 1 im Altertum nicht als Zahl betrachtet hat, weil zum Begriff der Zahl der der Teilbarkeit gehört. Unser Autor unterscheidet die beiden Seiten also schon, vgl. Note 32.

7) תמונה ist eigentlich Figur, als pars pro toto „Satz“ oder „Beweis“. Die ursprünglich geometrische Form der Sätze und Beweise hat sich in den Terminis technicis erhalten.

8) Für zwei Faktoren ist der Satz, dass ihre Reihenfolge gleichgültig ist, ohne Beweis in Nr. 1 angeführt. Wenn er auch, wie in den folgenden Sätzen, in rein algebraischer Form erscheint, so ist er doch eine Abstraktion aus einer geometrischen Betrachtung, die natürlich für mehr als drei Fak-

toren nicht mehr anwendbar ist, daher sind die folgenden 3 Sätze noch besonders bewiesen. Der Beweisgang ist analytisch, nicht synthetisch, während unsre Beweisführung jetzt auf dem letztgenannten Weg vorgeht.

9) Vorausgesetzt ist bei dem Beweis, wie man sieht, dass $\frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{a}{y}$ ist.

10) Der hebräische Text lautet וזה שאנחנו נשים על מספר ב' אחד. Hier ist על in dem Sinne „neben“ gebraucht, wie ועליו מטה מנשה Numeri 2. S. 20 · · · · Der Zweck der hinzuzusetzenden 1 ist, dadurch ebensoviele Glieder im Zähler wie im Nenner zu haben.

11) Wäre b in Nr. 13 gleich 1, so würde der erste Teil des Beweises lauten: Wir multiplizieren die aus c, d, h, s zusammengesetzte Zahl mit t, das Resultat sei x. Siehe, das Produkt cdhs wurde mit 1 multipliziert und ergab a und mit t multipliziert und ergab x, also verhält sich a zu x wie 1 zu t. Wird also 1 selbst nicht als Zahl angesehen wurde, wäre der Beweis doch richtig.

12) Nämlich, wenn wir je zwei von den Enden der Reihe gleich weit abstehende Zahlen zusammen fassen.

13) „Zu der letzten Zahl“ „wie“ „zu der ersten“ soll heissen, durch Addition derselben Zahl zu d gelangt man zur letzten, wie man durch Subtraktion ebendieser Zahl von d zur ersten gelangt. Vielleicht könnte man כהגיענו zeitlich fassen, „dass man zur letzten Zahl gelangt, „wenn“ man zur ersten kommt“.

14) Die Formel stimmt in anderer Schreibweise mit der von Leonardo Pisano (1225) mitgeteilten Formel. $12(1^2+2^2+\cdots\cdot n^2)=n(n+2)(2n+2)$ wenn n ungrade, $12(2^2+4^2+\cdots\cdot n^2)=n(n+2)(2n+2)$, wenn n grade ist, überein. Für ein grades h ist f ungrade, demnach, nach Satz 28, die Summe $(a+b\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot+f)=\frac{f}{2}(f+1)$, also $h(a+b\cdot\cdot+f)=(f-1)f(\frac{f+1}{2})=\frac{h(h+1).(h+2)}{2}$ das ist $=3(1^2+2^2+h^2)\because h(h+2).2(h+1)=12(1^2+2^2\cdot\cdot\cdot+h^2)$. Ist h ungrade, so folgt dasselbe aus Satz 26. Vgl. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik Bd. II, S. 321.

15) Die Formel stimmt mit der in der Mitte des ersten Jahrtausends schon bekannten $1^2+2^2+\cdot\cdot\cdot+n^2=n\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$ überein.

16) Vgl. dazu Tropfke. Bd. II, S. 332, der diesen Satz zuerst bei Luca Paciuolo (1494) unter den Abendländern findet und die Frage aufwirft, ob derselbe ihn nicht nur induktiv gewonnen habe. Wir haben hier einen streng mathematischen Beweis.

17) Dieser Satz und die folgenden sind für die Lösung der von Nr. 53. an folgenden Aufgaben bestimmt. Der Beweis ist für uns, die wir synthetisch vorzugehen gewöhnt sind, allerdings sehr umständlich, für uns wäre er durch die 2 Reihen $c(b-a)+a(c-b)=cb-ca+ca-ab=b(c-a)$ bewiesen. In den folgenden Beweisen wird übrigens dieser Weg verlassen und bis auf die Zeichenschrift so vorgegangen, wie wir es gewöhnt sind.

18) Der hebräische Text ist etwas unklar, er lautet ganz unvermittelt וא' הוא האמצעי. Wir haben es ja eigentlich mit 4 Zahlen 2, c, a, b, zu tun.

Bisher waren nur 2, c, a, b für sich betrachtet, von jetzt an wird c ausgeschaltet und auf 2, a, b der vorige Satz angewendet. Daher die ganz freie Uebersetzung der Stelle.

19) a kann natürlich nicht 1 sein, denn für $a=1$ ist die Aufgabe nicht zu lösen. In moderner Form würde die Aufgabe lauten $x+\frac{y+z}{2}=y+\frac{x+z}{b}=z+\frac{x+y}{c}\left[2<b<c\right]$. Man sieht sofort, a kann nicht 1 sein. Sucht man $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ zu bestimmen, so erhält man $\frac{x}{z}=\frac{\frac{1}{2}bc-(b-2)(c-2)}{(b-1)(c-2)+b(c-1)}$ $\frac{y}{z}=\frac{c(b-1)+(b-2)(c-1)}{(b-1)(c-2)+b(c-1)}$. So erhält man zunächst je einen Wert für x, y und z, und wie man sich leicht überzeugt, stimmen diese Werte mit dem angegebenen überein.

20) Vgl. Satz 52 und zwar für Seite 37; 20) für den Fall, dass die kleinste Zahl gleich 2 ist, für Seite 39; 20) für den allgemeinen Fall.

21) Vgl. Satz 51, auf Seite 37; 21) für den Fall $a=2$, auf Seite 39; 21) für den allgemeinen Fall.

22) Für den allgemeinen Fall lautete die eine Lösung der Gleichungen

$$x+\frac{y+x}{a}=y+\frac{x+z}{b}=+z\frac{x+y}{2}:\quad x=\frac{(a-1)^2(cb)-(b-a)(c-a)}{a}=$$

$$[(c-1)(a-b)+c(a-1)(b-1)].\quad y=[(b-a)(c-1)+c(a-1)(b-1)]$$

$z=[(b-1)(c-a)+b(c-1)(a-1)]$. Durch leichte Umformung kommt auf die hier angegebenen Werte.

23) Vgl. dazu Satz 50.

24) D. h. die Variationen sollen ohne Wiederholung sein, ebenso nachher bei den Combinationen.

25) Der hebr. Text lautet: ואם הוא מקרה. Es soll wohl damit gesagt sein dass die 1 nicht nach phytagoräischer Weise als das Wesen der Dinge aufgefasst werden darf. מקרה ist in der philosophischen Sprache ein Accidenz, nicht ein wesentliches Attribut.

26) Die Stelle lautet: ואין לו מצד המספר קצה ראשון וקצה אחרון. Der Sinn der Worte kann unmöglich sein, sie habe keine benachbarte Zahl, die ihre Grenze bedeutete, denn nach oben hätte sie eine solche ja wohl, ausserdem würde ja dann nicht passen אם היותו לכל המספרים קצה ראשון וקצה אחרון בפנים מה. Der Sinn wird durch das Weitere klar. Wäre die Linieneinheit aus Punkteinheiten zusammengesetzt, so hätte sie eine Begrenzung nach beiden Seiten hin, das sollte dann heissen, sie wäre entstanden, indem man von einer Punkteinheit ausgegangen wäre, und diese wäre dann die untere Begrenzung. Die letzte Punkteinheit, bei der man schliesst, wäre die obere Begrenzung. Die 1 ist aber nicht zusammengesetzt, während sie das zusammensetzende Element aller Zahlen und so zunächst ihre untere Grenze bedeutet. Vgl. auch Note 28.

27) Durch ein Versehen sind die Worte „nach unten" in den deutschen Text gekommen. Es muss heissen: „Wollte man der Eins als Zahl eine Begrenzung zuschreiben · · · · · Man kann sich die Eins ja aus Brüchen zusammengesetzt denken, und zwar aus lauter gleichen. Aber dann wäre

1 nicht mehr die Einheit sondern ihres Charakters als Einheit, der mit ihr doch verbunden sein soll, entkleidet worden.

28) Vgl. Note 26. In diesem Sinne ist die Eins vielleicht die Begrenzung der Zahlen nach oben genannt. Vgl. dazu auch Abr. ibn Esra, das Buch der Zahl. herausgegeben von M. Silberberg, S. 1, und Anm. 9.

29) Das hebr. מעלה ist bald mit Stufe, bald mit Rubrik übersetzt, je nachdem von der Zahl selbst oder von ihrer Stellung im Rechenbilde die Rede ist.

30) Der hebr. Text בנפש המנעו ist dunkel. Ob es vielleicht heissen soll בנפש המונו, gleich בנפש המונה אותו? Der Sinn ist jedenfalls der, dass das Unendliche nicht ein aktuell Existierendes sein kann, sondern nur potentiell in der unendlichen Vermehrbarkeit der Zahlen gegeben ist. Es sind die aristotelischen Darlegungen aus dem 3ten und 4ten Buch der Physik.

31) Die Schlussfolgerung ist nicht ausgesprochen — diese lautet: „also kann es keine aktuell existierende unendlich grosse Zahl geben, denn diese müsste mit Notwendigkeit entweder grade oder ungrade sein". Die jetzt folgenden Worte: „Daher kann es nicht umgekehrt sein" — beziehen sich nicht auf diesen letzten vorhergehenden Satz allein, wie das על כן erwarten liesse, sondern sie haben auf den ganzen letzten Abschnitt Bezug. Sie wollen sagen, wenn keine unendlich grosse Zahl aktuell existiert, so ist auch eine unendliche Teilbarkeit ausgeschlossen. Zum Wesen jeder endlichen Zahl gehört es aber, dass man durch eine endliche Anzahl von Teilungen zur Einheit gelangt, die wieder ihrem Wesen nach unteilbar ist.

32) Wir haben hier wieder den Unterschied zwischen „Einheit", als logischem Begriff, und Eins. Der Zusammenhang der Sätze ist klar, weil eben die Einheit, als logischer Begriff, als etwas Unteilbares hingestellt war, vgl. Note 31, wird jetzt von der Eins, der Trägerin der Einheit, als etwas Teilbarem gesprochen.

33) ראשונים, der Ausdruck Primen hätte vielleicht durch „Minuten" übersetzt werden können, um der Gleichmässigkeit des Ausdrucks wegen ist wörtlich ראשונים durch Primen übertragen worden.

34) מחברת konnte nicht „Vermehrung" übersetzt werden, denn auch Combinatorik ist darunter zu verstehen, wie wir nachher sehen.

35) und 36) Man ist versucht, unter dem hebräischen Wort בכמות die Anzahl zu verstehen und die verschiedenen Abteilungen der Combinatorik unter den angegebenen drei Weisen zu begreifen, indessen muss das erste Mal, wie aus dem Folgenden ersichtlich ist unter בכמות die Grösse verstanden werden. Wir haben also zuerst Addition, dann, in der zweiten Gruppe, Combination und Variation, in der dritten Gruppe endlich Permutation zu sehen.

37) Mit נמשכים sind arithmetische Reihen gemeint, der terminus technicus für geometrische Reihe ist מתיחסים.

38) גלגל, 0, wurde zuerst als voller Kreis geschrieben, daher die Bezeichnung גלגל. Der Ursprung des Symbols als des 0 des griechischen οὐδέν ist bekannt. Einen Positionswert hat 0 bei unserm Autor noch nicht, es

bedeutet nur das Zeichen, dass nichts vorhanden ist, להורות שאין בזאת המעלה מספר. Ausdrücke, wie הכינו על גלגל ועלה גלגל, bedeuten nichts Gegenteiliges.

39) Da die hebräische Schreibweise von rechts nach links geht, ist rückwärts die r e c h t e Seite. Wo Buchstaben Positionswert als Ziffern haben, sind sie immer von links nach rechts zu lesen.

40) Die ganzen Zahlen sind nach oben hin unendlich weit fortzuführen, die Brüche nach unten hin, daher steigen die Rubriken der ganzen Zahlen von links nach rechts, die der Brüche, so weit der Wert in Betracht kommt auch, aber da die Rubriken der Brüche nach dem Nenner bezeichnet werden sollen, steigen die Ordnungen der Brüche von links nach rechts. Bezeichnend nennt unser Autor sie an einer Stelle שפלות המעלות, i. G. zu גבהות המעלות bei den ganzen Zahlen.

41) Der Beweis ist nicht richtig. In Wahrheit ist die erste Stufe ebenso gut doppelt gezählt wie die fünfte. Der Grund liegt vielmehr darin, dass die erste Stufe faktisch den Namen der nullten verdient, dann wäre die Stufe des Produkts wirklich die Summe der Stufen der Faktoren. Die erste Stufe verdiente aber den Namen der nullten, weil, selbst wenn man bei ihrem Anfangspunkt zu messen beginnt, ja der Abstand 1 erst bei 10 erreicht wird, 10 also die erste Einheit einer Stufe ist, die einen Abstand besitzt, während die Einheit 1 einen solchen nicht hat. Bei den Brüchen befindet sich die Einheit aber grade, wenn wir geometrisch die Sache betrachten, am Ende der Stufe, hat also schon den Abstand 1 nach rechts, so dass hier die Primen schon als erste Rubrik der Brüche gerechnet werden dürfen und doch die Stufe des Produkts gleich der Summe der Stufen der Faktoren ist. Für uns ist es klar, dass wir so zählen, $10^0=1$, $10^1=10$! Daher ist z. B. 10000 für uns die vierte Stufe, während sie unser Autor als die fünfte zählt. Die Stelle, in der er über die Multiplikation von Brüchen spricht, und in der es heisst: הסבה בזה שלא נמנית בשברים מדרגת השברים אשר ממנו התחלתם אך התחלת מנין המעלות מהשברים הראשונים hat diese Unterscheidung offenbar im Auge, „der Grund dafür — nämlich, dass bei den Brüchen die Stufe des Produkts gleich der Summe der Stufen der Faktoren ist — liegt darin, dass bei den Brüchen die Stufe der Einer nicht mitgezählt wird, sondern der Beginn der Stufe der Brüchen ist bei den Primen“, das ist zwar nicht deutlich ausgedrückt, kann aber nichts anderes bedeuten. Um so befremdlicher ist es, dass das nicht oben ausgesprochen ist.

42) Das erste Zwischenresultat ist nach unsrer Ausdrucksweise $(a+x)(b-x)$. An sich ist es gleichgiltig, ob $a >$ oder $<$ b ist, immer gibt in dem Falle, dass a durch Addition abgerundet wurde, die Addition von $x(a+x-b)$ das Resultat a. b ebenso wenn a nach unten abgerundet wurde und das erste Zwischenresultat demnach $(a-x)$ $(b+x)$ wäre, gäbe sowohl für $a > b$ als für $a < b$ die Subtraktion von x $(a-x-b)$ das Resultat a . b. Unser Autor kennt aber keine negativen Grössen, deshalb muss er unterscheiden, wie er unterschieden hat.

43) Diese Weise ist von Abraham ibu Esra in seinem „Buch die Zahl“ (Ed. Silberberg, S. 6) angegeben: „Die Stelle lautet dort: „Eine andere, wichtige Methode, die ich herausgefunden, mit Hilfe von Dritteln: Wir nehmen

$^1/_3$ der Zahl, berechnen, wie gross das Quadrat hiervon ist, nehmen die entsprechende Zahl in der noch höheren Stufe und subtrahieren das Quadrat des Drittels, so ist der Rest das Gesuchte". Die Methoden erscheinen uns sehr nebensächlich und kaum anwendbar, man muss aber bedenken, dass sie wohl nur für Berechnungen angewendet werden sollen, die nicht schriftlich vorgenommen werden.

44) Vgl. im ersten Teil Satz 38.

45) Vgl. im ersten Teil Satz 42.

46) S. 77 מספר המשך ist die Reihendifferenz, Differenz schlechthin, so ist das Wort von jetzt an übersetzt. Die Summe einer arithmetischen Reihe von n Gliedern, mit dem Anfangsglied a und der Differenz d ist $s = \frac{1}{2}[a+(n-1)d] . n$. Unser Autor führt sie auf die Summe der natürlichen Reihe zurück. Er erhält in unsrer Zeichenschrift $s = n . \frac{n+1}{2} . d - (d-a)n$ oder $s = n . \frac{n+1}{2} . d + (a-d)n$, je nachdem $d >$ oder $< a$ ist, man sieht sofort, dass die Formel dieselbe ist. Dass für den Fall $d >$ oder $< a$ 2 Formeln angegeben werden, hat seinen Grund darin, dass negative Zahlen nicht gestattet sind.

Seite 78. Auch hier muss aus demselben Grunde zwischen den 2 Fällen unterschieden werden. Vgl. Note 48.

47) Das dem so ist, sieht man sofort aus der Formel.

$$\left[n . \frac{n+1}{2} . d + (a-d)n\right] 2(a-d) - n(a-d)^2 = 2\left[d . n . \frac{n+1}{2}\right] (a-d) + n(a-d)^2.$$

Die eckige Klammer links, ist in unsrer Schreibweise die Summenformel einer allgemeinen arithmetischen Reihe, wie sie unser Autor angibt, die eckige Klammer rechts die Summe der nicht natürlichen Reihe mit dem Anfangsglied und der Differenz d. Der Hinweis auf den Anfang des ersten Abschnittes bezieht sich nicht auf einen bestimmten Satz sondern auf das allgemeine dort dargelegte Prinzip des Absonderns gemeinschaftlicher Faktoren, das dort in mehr geometrischem Gewande erscheint.

48) Im andern Falle musste eben von jeder Zahl 2 abgezogen werden, um eine nicht natürliche Reihe herzustellen, also ist jedes Glied der Reihe um $2(a-d) . a + (a-d)^2$ verkleinert worden, also hat man das entsprechende Zwischenresultat zu addieren. Der erste Fall würde sich in unsrer Schreibweise so darstellen. Das allgemeine Glied der Reihe ist $(a+pd)^2$. Dafür schreiben wir $[(d-a)+a+pd]^2 - (d-a)^2 - 2(d-a)(a+pd) = [(p+1)d]^2 - (d-a)^2 - 2(d-a) . (a+pd)$. Summiert man so erhält man $a^2 + (a+d)^2 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot [a+(n-1)d]^2 = d^2 + 2d^2 + \cdot \cdot \cdot (nd)^2 - n(d-a)^2 - 2(d-a)[a + (a+d) + \cdot \cdot \cdot a + (n-1)d]$. Für den andern Fall, erhielte man, wenn für das allg. Gliedes $(a+pd)^2$ geschrieben wird $[a - (a-d) + pd]^2 - (a-d)^2 - 2(a-d)(a+pd)$ als Wert für die Summe der Reihe $a^2 + (a+d)^2 + \cdot \cdot \cdot \cdot [a+(n-1)d]^2 = d^2 + (2d)^2 + \cdot \cdot \cdot (nd)^2 - n(a-d)^2 - 2(a-d)[a + (a+d) + \cdot \cdot \cdot a + (n-1)d]$. Für die jetzt folgende Summerierung der Reihe $(a)^3 + (a+d)^3 + \cdot \cdot \cdot [a+(n-1)d]^3$ stellt man sich dieselben Beziehungen leicht her.

49) Gemeint ist der Exponent der Reihe, der ja eben das Verhältnis je zweier folgenden Glieder ausdrückt.

50) Vgl. Berichtigungen. Es muss heissen, so verhält sich die Differenz zwischen dem letzten und dem ersten zu der Summe aller Zahlen der Reihe vor ihm, d. h. zu der Summe aller Glieder vor dem letzten. Hier fehlt offenbar ein Satz: Multipliziere die Differenz zwischen dem letzten und ersten Glied mit diesem Verhältnis und addiere die letzte Zahl hinzu. Die sich ergebende Formel in moderner Schreibart $\frac{(t-a)}{e-1}+t=a\frac{(c^{n-1}-1)}{c-1}+ae^{n-1}$ ist mit unsrer Formel $a\frac{(e^{n}-1)}{e-1}$ fast übereinstimmend.

51) Es sollten eigentlich die Zahlen der 4 Reihen über der Reihe des Dividenden durchgestrichen sein, die Typen waren nicht zu bekommen. Betrachtet man sich das Rechentableau, so wird man die Uebereinstimmung gerade mit unserm modernsten Verfahren finden. Man denke sich nur die Reihen der Dividenden nach unten gesetzt, so hätte man unser modernstes Schema. Dass die Resultate der einzelnen Multiplikationen hier angegeben sind [der Text verlangt das nicht], ist eine angenehme Controlle, addiert man die Reihen unter der Reihe des Divisors und dazu die oberste Reihe des Restes, so muss sich die Dividendenreihe ergeben. Vielleicht ist der Grund, dass die Resultatreihe zwischen die beiden andern gesetzt ist, darin zu suchen, dass sie ja als Multiplikatorreihe gebraucht wird, die Divisorreihe als Multiplikandenreihe. Wir haben dann hier zugleich Schema der Multiplikation und der Division.

52) שברי שברים ist mit Doppelbrüchen übersetzt, es bedeutet aber nicht nur Doppelbrüche, sondern ebenso sehr mehrfache Brüche überhaupt.

53) לפי שהשטחים מתדמים, die Flächen, d. h. die Rechtecke sind einander ähnlich. Aehnliche Figuren verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten. Der Satz erscheint hier also ganz und gar in geometrischer Einkleidung.

54) Es ist wörtlich übersetzt worden, nach dem Wortlaut des Textes im hebr. gehörte das „zusammen" zu den Brüchen, gemeint ist aber jeden Bruch einzeln mit allen Ganzen auf einmal.

55) Hier ist ein Beispiel für die Bemerkung Seite 87, Zeile 3ff. Hätte man als Resultat der Division 59″ genommen, so wäre bei Multiplikation mit $41^{53}/_{60}$, dem erhöhten Divisor, mehr als 2471 herausgekommen. Also musste man erst mit 58 versuchen und erhielt dann die fehlende 1″ bei der nächsten Division.

56) ולזה יקרא מדבר בכח בלבד so lautet der hebr. Text. כח ist das Potentielle, also haben wir etwas, was sich nur als potentiell darstellen lässt, nicht aber genau erreicht werden kann, das ist das Irrationale.

57) Später ist die Reihe immer טור השרש, die Reihe der Wurzel genannt.

58) Es wird hier unterschieden zwischen שרש המוצא und שרש היוצא, bei jeder folgenden Operation ist das bisher gefundene Resultat שרש המוצא, die

„gefundene“ Wurzel, so haben wir es übersetzt, wenn es wohl auch in keinem Fall etwas mit מצא etwa als Part. II Qual zu tun hat, sondern Hophal von יצא ist. שרש היוצא ist die sich „ergebende“ Wurzel.

59) „Das ist so“, nicht dass die Probe dieses Resultat ergeben muss, sondern der ganze Vorgang beim Ausziehen der Quadratwurzel beruht darauf.

65) Würde noch soviel bleiben, so wäre die angenährte Wurzel eben um 1 zu klein genommen.

61) Die Methode stammt aus sehr alter Zeit, was sie eigentlich an Erleichterung bringen soll, ist für uns nicht einzusehen. Nur wenn wir an eine Zeit denken wollen, der die Zahlenschrift nicht geläufig war, könnten wir verstehen, dass es angenehmer ist. lieber viele kleine Zahlen niederzuschreiben, als so unförmig grosse. Da unser Autor aber den Ziffern schon einen Positionswert gegeben, ist es für ihn eher eine Erschwerung der Rechnung als eine Erleichterung. Vgl. dazu Cantor, Geschichte der Mathematik.

62) Der Grund ist leicht einzusehen. Sei die Zahl $(10x+y)^3=(10x)^3+3\,.\,(10x)^2y+3(10x)y^2+y^3$. Zuerst wird $(10x)^3$ abgezogen, es bleibt $3\,.\,(10x)^2y+3(10x)y^2+y^3$. Dividiert wurde durch $3\,.\,(10x)(10x+1)$. Ergibt das ein y und multipliziert man $3(10x)(10x+1)$ mit y, und wird das Ergebnis sowie y^3 weggenommen, so bleibt $3\,.\,(10x)y^2-3\,.\,(10x)y=3(10x)y(y+1)$. Wenn also der Radikand sich in die Form $(10x+y)^3$ bringen lassen soll, muss jetzt noch $3(10x)y(y-1)$ da sein. Das wird auf folgende Weise geprüft.

$$\frac{3\,.\,(10x)y(y-1)}{3(10x)^2y+3(10x)y^2+y^3} < \frac{3\,.\,(10x)y(y-1)}{3(10x)y^2+3(10x)y^2} \text{ d. h. } < \frac{3\,.\,(10x)y(y-1)}{3\,.\,(10x)y(10x+y)}$$

oder $< \frac{y-1}{10x+y}$. Ist also der Rest so gross, dass sein Verhältnis zu der geteilten Zahl gleich oder grösser ist als das Verhältnis $\frac{y-1}{10x+y}$, so ist die die Zahl in die Form $(10x+y)^3$ bezw. $(10x+y)^3+r$ zu bringen.

63) Die zweite Weise, y zu berecbnen, ist eben nur eine Schätzung, es ist ja gar nicht der Fall, dass $(10x+1)^3-x^3$ gleich $^1/_{10}[(11x)^3-10x)^3]$ ist. Zur Abschätzung des Wertes von y ist die Annahme, als Intenpolationsmethode zu gebrauchen. Die Erleichterung ist, genau genommen, also eine illusorische unter Umständen. Bei Anwendung des ersten Weges kann es vorkommen, dass man y zu gross wählt Es war dort durch $[(10x+1)^3-(10x)^3]$ geteilt worden, die Differenzen zwischen den Reihen auf einander folgenden Zahlen wachsen ja aber fortwährend, so dass man durch Division durch die zu kleine Zahl zu einem zu grossen Resultat kommen kann. Im zweiten Falle kann man, wie hier bemerkt wird, zu einem zu kleinen y kommen, weil das, wodurch man teilt, als zu gross anzusehen ist.

64) Vgl. Nr. 61. Das dort Gesagte gilt in erhöhtem Masse hier. Das Beispiel, das im Manuscr. durchgeführt wird, weist wesentliche Fehler auf. Die einzelnen Resultate stimmen nicht, und auch unter einander stimmen sie nicht überein. Dieser Teil ist ja nur im Wiener Manuscr. vorhanden, es liegt dadurch die Vermutung nahe, dass es nicht von Gersonides herrührt.

Der Abschreiber hatte ja auch vorher schon 2 Sätze eingefügt habe. (Hebräischer Teil I Note 209). Schon die erste Umrechnung stimmt nicht. Um 5,987654321 in geometrische Brüche zu verwandeln, brauchen wir ja nur folgendes Schema aufzustellen.

5	9	8	7	6	5	4	3	2	1	· 60
59	2	5	9	2	5	9	2	6	0	· 60
15	5	5	5	5	5	5	6	0	0	· 60
33	3	3	3	3	3	6	0	0	0	· 60
20	0	0	0	1	6	0	0	0	0	· 60
0	0	0	9	6	0	0	0	0	0	· 60
0	5	7	6	0	0	0	0	0	0	· 60
34	5	6	0	0	0	0	0	0	0	· 60
33	6	0	0	0	0	0	0	0	0	· 60
36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Man sieht also, das Resultat der Herabsetzung ist 5 Ganze, 59', 15'', 33''', 20'''', 0''''', 0'''''', 34''''''', 33'''''''', 36'''''''''. Da der Text nicht so geändert werden sollte, sind die Zahlen der Handschrift stehen geblieben. Im Resultat stimmen die Worte übrigens auch nur bis zu den Secunden.

65) Auch dieses Beispiel stimmt absolut nicht, und zwar muss der Fehler in den Nennern der Doppelbrüche stecken. Denn bei diesen Nennern wären Erweiterungen mit $7^3 . 4^3$, bezw. $7^2 . 4^2$, bezw. mit $7 . 4$ vorzunehmen, dabei können aber nur gerade Zahlen herauskommen, und 99^3 ist doch ungrade.

66) Der Ausdruck שפלות המעלה ist natürlich darauf zurückzuführen, dass ja der Wert des Bruchs durch das Wurzelausziehen grösser wird.

67) Auch hier stimmen die Zahlen nur in den ersten Brüchen genau.

68) Die Bezeichnung dessen, was x bedeuten soll, fehlt im Manuscr., das auch an dieser Stelle sehr fehlerhaft ist.

Berichtigung.

Seite 31 Zeile 5 muss heissen: „aus der um 1 verminderten mittleren".
„ 32 „ 10 „ „ „und die kleinste 2 ist".
„ 56 „ 14 die Worte „nach unten" sind zu streichen.
„ 83 „ 9 von unten muss es heissen: zur Summe aller Zahlen der Reihe vor dem letzten.

שמור	des Gemerkte, d. [Zwischenre-
שמיני	Oktave [sultat
שני	Sekunde
שפלות מעלה	Ordnung der Stufe
ששי	Sexte
שרש	Wurzel
שרש היוצא	die sich ergebende Wurzel
שרש המוצא	die gefundene Wurzel
תוספת	Ueberschuss, Differenz
תכונה	Geometrie
תמונה	Figur, Beweis Satz
תמורה	Vertauschung der Glieder einer
תשיעי	None [Proportion

מספרים גיליים	entsprechende Zahlen
מספרים משותפים	Zahlen, die gemeinschaftlichen [Faktor haben
מספרים נמשכים	Zahlenreihe
מעלה	Stufe, Rubrik
מעוקב	Würfel, dritte Potenz — von
מקובץ	Summe [עקב, erhaben sein, vgl.
מרובע	Quadrat [והיה העקוב למישור
מרחק	Abstand
נושא	Benennung, Element (in der [Combinatorik)
נחבר	Summe
נמשכים	a) Zahlenreihe, b) Hinterglieder [einer Proportion
נמשכים בדרך המספר	natürliche Zahlenreihe
נמשכים בזולת דרך המספר	nicht natürliche Zahlenreihe, s. [Note 4.
נעלם	das Unbekannte
נערך	Produkt
נפרד	ungrade
נקבץ	Summe
סכום	Summe
עולה	des Resultat
ערך	multiplizieren
עשירי	Dezime
צלע	Seite, Faktor
קבץ	addieren
קודמים	Vorderglieder einer Proportion
קו	Linie
קורא	Nenner
קצה אחרון	obere Grenze
קצה ראשון	untere Grenze
קרא	benennen
ראשון	Minute, Prime
ראשון אל	prim zu
רביעי	Quarte
שביעי	Septime
שבר	Bruch
שבר השבר	Doppelbruch
שטח	Fläche, Produkt
שלישי	Terz

חבור	Addition, Summe
חלק	Bruch, Teil
חלק על	dividieren durch
חמשי	Quinte
חסר	subtrahieren
חסרון	Differenz
טור	Reihe
יחס	Verhältnis
יחס השווי	Proportion [tes Verhältnis
יחס שנוי ביחס	ein mit sich selbst multiplizier-
יחס משולש	ein dreimal als Faktor gesetz-
יסוד	Wurzel, Basis [tes Verhältnis
יתרון	Differenzen, Ueberschuss
כלל	Dekade
כָּפַל	multiplizieren
כֶּפֶל	das Doppelte
כפלים	das Vielfache
לו תומר od. לו תאמר	angenommen, dass
מגרעת	Subtraktion
מדבר בכח	irrational
מדרגה	Stufe, Rubrik
מוכה	Multiplikand
מורה	Nenner
מורה ראשון	Generalnenner
מחברת	Addition
מחברת	Complexion (in der Combinatorik)
מחברות מתחלפות בסדר לבד	Permutationen
מחברות מתחלפות בנושאיהן	Combinationen
מחברות מתחלפות אם בסדר אם בנושאיהן	Variationen
מכה	Multiplikator
מנה	als Faktor enthalten oder ent-
מספר	Zahl, Zähler [halten sein
מספר דרוש	gesuchte Zahl
מספר ההמשך	Reihendifferenz
מספר מונה	gegebene Zahl
מספר מורכב	zusammengesetzte Zahl
מספר נשבר	eine Zahl aus 2 Stufen, zwei-
מספר שלם	abgerundete Zahl [ziffrige Zahl

Worterklärung.

אבן	Rubrik
אחד, אחדים	Eins, Einheit
אין תכלית	unendlich
אמצעי בין	arithmethische Mittel
אמצעי ביחס	geometrische Mittel, mittlere
בקש	suchen s. מספר [Proportionale
גובה מעלה	die Ordnung der Stufe
גיל	entsprechend
גלגל	Null
גרע	subtrahieren
גרעון	Subtraktion
גשם	Körper
דמיון	a) Beispiel, b) gleicher Teil
דרש	siehe מספר [bei Proportionen
הבדל	Differenzen bilden, insbesondere
הוסף על	addieren [b) heruntersetzen
הורד	a) herunterholen, bei Division
הכאה	Multiplikation
הכה על	multiplizieren [vertauschen
המר von מור	die Glieder einer Proportion
המשך	Abstand, Differenz, s. auch מספר
הניח	annehmen
הספק	genügen
הפך	umkehren, sc. die Glieder einer
הקף ב'	enthalten [Proportion
השלם	abrunden
השלמה	Abrundung
השתתף	gemeinsam haben
התחלף	verschieden sein
התיחס	in Proportion stehen
זוג	paar, grade
חבר	addieren

התמורה אם כן יתרון ט על ע הוא מ אם כן מספרי כטהזל הם הגיליים למספרי אבגדה ויתרון מספר ט על החלקים המונחים ממספרי כז הוא מ והוא מה ש״ל זה הוא מה שרצינו להציע והוא מועיל מאד בזה השער . . . .

כתב [212] המחבר נשלם השער הששי מזה המאמר ובהשלמו נשלם זה הספר והתהלה לא לבדו והיתה השלמתו בראש ניסן של שנת שמונים ואחת לפרט האלף הששי בהגיעי לשנת שלשים ולשלש משנותי [213].

וברוך העוזר.

---

[212]) In M II noch 2 שאלות, in W. noch eine grössere Reihe von שאלות. Siehe Einleitung im Deutschen Teil, [213]) am Schluss von W. und M. II die folgenden Worte ע״י צעיר התלמידים רכ״ב, in W. noch: תם תם ונשלם הספר לא יזק לא היום ולא לעולם עד שיעלה בסולם שיעקב אבינו הלם היום י׳ ו׳ כ״ט תשרי שי״ג לפ״ק פרט ואמת כברכה אשר ברך משה ע״ה.

ונשים יתרון נ̇ על מספר ה̇ מספר ס̇ הנה נכה א̇ במ̇ ונחלק על ס̇ ויצא לנו מספר כ̇ והוא גיליי למספר א̇ וכן לא נסור עד שיצאו לנו מספרי כטהזל ונבאר שמספרי כטהזל הם המספרים המבוקשים המופת שיחס ס̇ אל מ̇ הוא יחס כל מספר ממספרי אבגדה אל גילו אם כן יחס ט̇ אל מ̇ כיחס מקובץ אג̇ אל מקובץ כה̇ וכיחס ה̇ אל ל̇ וכאשר הבדלנו הנה יחס ס̇ אל ה̇ כיחס יתרון כה̇ מקובצים על ל̇ אל ל̇ וכאשר המירונו הנה יחס ס̇ ליתרון כה̇ על ל̇ כיחס ה̇ אל ל̇ וכאשר היה גם כן יחס ט̇ אל מ̇ כיחס ה̇ אל ל̇ א״כ יתרון כה̇ על ל̇ הוא מ̇ א״כ מספרי כטהזל הם גיליים למספרי אבגדה ויתרון כה̇ מקובץ על ל̇ הוא מ̇ והוא מש״ל.

וגם כן אם לא היה נודע מהמספרים הגיליים הנעלמים אלא שמספר מהם ידוע הגיליות או מקובץ מספרים מהם ידועי הגיליות מוסיף על הלק או חלקים ממספרים מהם ידועי הגיליות מספר מונח הנה כבר אפשר לנו שנעמוד מזה על ידיעת המספרים הגיליים למספרים המונחים ויהיה נודע לנו במשלנו זה שמספר ט̇ מוסיף על הלקים מונחים ממספרי כז̇ מקובצים מספר מ̇ הנה נשים החלקים ההם ממספרי אד̇ מקובצים מספר נ̇ ונבאר שמספר ב̇ מוסיף על מספר נ̇ וזה שיחס ב̇ הידוע אל ט̇ הנעלם הוא כמו יחס א̇ הידוע אל כ̇ הנעלם אם כן יחס ב̇ אל ט̇ כיחס מקובץ אד̇ אל מקובץ כז̇ אבל יחס מקובץ אד̇ אל מקובץ כז̇ הוא כיחס נ̇ אל החלקים המונחים ההם ממספרי כז̇ וזה הוא מבואר שיחס אד̇ אל נ̇ הוא כיחס כז̇ אל החלקים ההם המונחים ממספרי כז̇ וכאשר המירונו התאמת המאמר הנה אם כן יחס ב̇ אל ט̇ הוא כמו יחס נ̇ אל החלקים המונחים ממספרי כז̇ וכאשר המירונו הנה יחס ב̇ אל נ̇ הוא כיחס ט̇ אל החלקים המונחים ממספרי כז̇ אבל מספר ט̇ מוסיף על ההלקים הנה אם כן מספר ב̇ מוסיף על נ̇ ונשים יתרונו על נ̇ מספר ע̇ הנה נכה א̇ במ̇ ונחלק על ע̇ ויצא כ̇ והוא גיליי למספר א̇ וכן לא נסור עד שיצאו לנו מספרי כטהזל ונאמר שמספר כטהזל הם המספרים המבוקשים המופת שיחס ע̇ אל מ̇ הוא יחס כל מספר ממספרי אבגדה אל גילו אם כן יחס ע̇ אל מ̇ כיחס מקובץ אד̇ אל מקובץ כז̇ וכיחס ב̇ אל ט̇ הנה מפני שיחס נ̇ אל אד̇ כיחס ע̇ אל כז̇ יהיה יחס נ̇ על ע̇ כיחס אד̇ אל כז̇ על התמורה אבל יחס אד̇ אל כז̇ הוא כיחס ב̇ אל ט̇ אם כן יחס נ̇ אל ע̇ הוא כיחס ב̇ אל ט̇ וכאשר המירונו והפכנו הנה יחס ב̇ אל נ̇ כיחס ט̇ אל ע̇ אבל ב̇ מוסיף על נ̇ מספר ס̇ הנה אם כן ט̇ מוסיף על ע̇ וכבר היה יחס ב̇ אל ס̇ כיחס ט̇ אל מ̇ על

הגיליים למספרי אבגדה הנה נכה ז בא ונחלק על ד ויצא לנו כ הנה מפני ששטח א בז כמו שטח כ בד הנה יחס א אל ד כיחס כ אל ז ועל התמורה הנה יהיה יחס א אל כ כיחס ד אל ז וכזה התבאר שאם הוכה ב בז והולק על ד ויהיה העולה ט שמספר ט הוא הגיליי למספר ב וגם כן כבר יוכה ג בז ויחולק על ד ויצא ה הנה ה גיליי למספר ג וג״כ כבר יוכה ה בז ויחולק על ד ויצא ל הנה ל גיליי לה הנה כבר מצאנו המספרים הגיליים לאבגה והם כטהזל והוא מבואר שמספרי כטהזל על יחס מספרי אבגדה ומש״ל.

וגם כן אם לא היה נודע לנו מספר מהמספרים הגיליים ונדע לנו מקובץ שניים מהגיליים או שלשה מהם הנה כבר אפשר שנעמוד מזה על המספרים והמשל שיהיה נודע לנו במשלנו זה שמקובץ כזל כמו מספר מ ורצינו לעמוד מזה על המספרים הגיליים למספרי אבגדה המונחים הנה נשים מקובץ גילי מספרי כזל והם מספרי אדה מספר נ וכמו יחס נ אל מ כן נשים יחס כל מספרי אבגדה אל גילו ולזה הנה נכה מ בא ונחלק על נ ויצא מספר כ ובזה הדרך נוציא מספרי כטהזל ונאמר שמספרי כטהזל הם המספרים המבוקשים המופת שיחס נ אל מ כיחס א אל כ וכיחס ד אל ז וכיחס ה אל ל וכאשר קבצנו הנה יחס נ אל מ כיחס מספרי אדה מקובצים אל מספרי כזל מקובצים וכאשר המירונו הנה יחס נ אל אדה מקובצים כיחס מ אל כזל מקובצים אבל נ שוה למספרי אדה מקובצים אם כן מ שוה למספרי כזל מקובצים אם כן כבר מצאנו המספרים הגיליים למספרי אבגדה ומספרי כזל מהם מקובצים שוים למספר מ המונח.

וג״כ[211]) אם לא יודע לנו מהגיליים אלא שיתרון מספר מהם ידוע הגיליות או מקובץ מספרים ידועי הגיליות על מספר מהם ידוע הגיליות או מקובץ מספרים ידועים הוא מספר מונח הנה אפשר לנו שנעמוד מזה על המספרים הגיליים איש על מקומו והמשל במשלנו זה הקודם שיודע לנו שמקובץ מספרי כה מוסיף על מספר ל מספר מ ואם רצינו לעמוד מזה על ידיעת המספרים הגיליים למספרי אבגדה הנה נשים מקובץ אג מספר נ ונבאר שמספר נ הוא מוסיף על מספר ה וזה כי לפי שהיה יחס א הידוע אל כ הנעלם הוא יחס ג הידוע אל ה הנעלם והוא יחס ה הידוע אל ל הנעלם הנה אם כן יחס אג מקובצים אל ה כיחס כה מקובצים אל ל אבל מקובץ כה מוסיף על ל אם כן מקובץ אג מוסיף על ה

[211]) Nur in W.

דרך הוצאת מספר אמצעי ביחס בין שני מספרים מונחים מתחלפים ערוך האחד על האחר והוצא ישרש העולה הרבועי והוא המבוקש דמיון זה אם רצית שתמצא המספר האמצעי ביחס בין שני מספרי ד׳ וי״א ערוך ד׳ על י״א והנה מ״ד הוצא את יסודו הרבועי ועלה ו׳ שלמים ל״ז ראשונים נ״ט שניים מ״ב שלישיים והוא אמצעי ביחס בין מספרי ד׳ וי״א בקירוב גדול.

דרך הוצאת שני מספרים אמצעים ביחס בין שני מספרים מונחים מתחלפים חלק הגדול על הקטן והעולה בחלוק הוצא את יסודו העקוביי והוא השמור הראשון גם הוצא מרובע יסודו העקוביי והוא השמור השני ערוך השמור הראשון על המספר הקטן משני המספרים המונחים ויצא לך המספר הנמשך ביחס הדרוש למספר הקטן ערוך השמור השני על המספר הקטן[207]) ויצא[208]) לך המספר השלישי ביחס הדרוש למספר הקטן והנה המבוקש דמיון זה אם רצית שנמצא שני מספרים אמצעים ביחס בין ט״ו וכ״ה הלקנו כ״ה על ט״ו ועלה אחד שלם ומ׳ ראשונים הוצאנו יסודו העקובי ועלה אחד שלם י״א ראשונים ח׳ שניים ט׳ שלישיים י״ט רביעיים ד׳ חמשיים ל׳ ששיים והוא השמור הראשון והנה מרובע השמור הראשון הוא אחד כ״ד ראשונים כ׳ ל״ה מ״ה ל״ד י׳ כ״ח כ״ז נ״א ב׳ ט״ו והוא השמור השני ערכנו השמור הראשון על המספר הקטן שהוא ט״ו ועלה י״ז שלמים מ״ז ראשונים כ״ד מ״ו ז׳ ל׳ וזה המספר הוא השני למספר ט״ו ערכנו השמור השני על ט״ו ועלה כ״א שלמים ה׳ ח׳ נ״ו כ״ג ל״ב ל״ז ו׳ נ״ז נ״ג מ״ה והוא המספר השלישי למספר ט״ו ואומר שאלו שני המספרים הם אמצעים ביחס הקירוב בין ט״ו ובין כ״ה וזה שכל מעוקב כבר יפול בינו ובין האחד שני מספרים אמצעים[209]) והאחד מהם הוא שרש המעוקב והאחר מרובעו וזה שיחס האחד אל שרש המעוקב כיחס השרש אל המרובע וכיחס המרובע אל המעוקב וכבר לוקחו לאלו הארבעה כפלים שוים והוא ט״ו וזה שהאחד הוכה בט״ו והיה ט״ו והמעוקב הוכה בט״ו והיה כ״ה והמספרים האמצעים הוכו בט״ו גם כן הנה א״כ אלו הארבעה הכפולים בט״ו הם גם כן מתיחסים בכמו היחס הקודם בעינו והקש על זה.

השער[210]) הששי

בערכים והוא הקש המספרים קצתם אל קצת. כבר ידעת שכל ארבעה מספרים מתיחסים הנה שטח הראשון ברביעי כמו שטח השני בשלישי וכאשר היה זה כן הנה נבאר לך אם היו מספרים מה מונחים והיה לנו מספר אחד מונח שני והוא גיל אחד מונח מהמספרים ההם איך תוציא שאר המספרים הגיליים עד שיהיו המספרים הגיליים בכמו זה היחס הקודם ראוי שתדע שאם תכה אחד מהמספרים במספר המונח השני ותחלוק על גילו יצא לך המספר הגיליי למספר אשר הוכה על המספר המונח השני דמיון זה שהמספרים המונחים מספרי אבגדה והיה מספר ז גיליי למספר ד ונרצה שנמצא המספרים

---

[207]) Im Manuscript המספר הגדול, [208]) im Manuscr. ויוציא, [209]) im Manuscr. noch die Worte בין ט״ו ובין כ״ה, [210]) aus W. u. M. I.

מעוקב ז׳ במעוקב ד׳ אם כן המורה לאלה השברים הוא מעוקב ושרשו העקוביי הוא שטח ז׳ בד׳ שהוא כ״ה ערכנו מ״ד עם השברים על המורה והוצאנו שרש העולה והנה צ״ט חלקנו צ״ט על כ״ה ועלה ג׳ שלמים וט״ו חלקים מכ״ח [205] באחד וככה המבוקש.

דרך הוצאת השרשים העקוביים משברים מונחים משברי התכונה הקור תחלה על המדרגה האחרונה שבטור אם היא מעוקבת ואם אינה מעוקבת הורד המדרגה אל שלפניה עד שתגיע למדרגה מעוקבת והמספר שתמצא במדרגה ההיא תוציא שרשו העקוביי הקרוב ואולם המעט ותשים העולה במעלה אשר אבארה והוא שתחלק שפלות המעלה על ג׳ ושם תשים העולה משל זה אם היתה המדרגה מדרגת הששיים הנה כאשר תחלק שפלות המעלה שהוא ו׳ על ג׳ יעלה ב׳ ולזה תשים העולה במדרגה השנית וזה שהשניים הוכו בעצמם והיו רביעיים והרביעיים הוכו בשניים והיו ששיים ותוציא מעוקב השרש המוצא ותגרעהו מהטור העליון והנשאר לך תנסה אם תוסיף אחד במדרגה שלפני השרש המוצא כמה יתוסף המעוקב ועל העולה הלק הנשאר בדרך שישאר לך מעוקב השרש היוצא ומספר יחסו אל המספר המחולק כיחס השרש היוצא פחות אחד אל השרש המוצא והיוצא וסוף דבר תנהוג בשלמות הוצאתו כמנהג הקודם דמיון זה אם רצית לדעת שרש נ״ט ראשונים כ״ג שניים ז׳ שלישיים מ׳ רביעיים העקוביי הורד הראשונים והשניים אל מדרגת השלישיים ועלה שם ז׳ה׳ז׳ג׳א׳ב׳ הוצאנו השרש הקרוב לזה המספר והוא נ״ט והם ראשונים לפי מה שקדם והנשאר הוא ה׳ אלפים ת״ה שלישיים מ׳ רביעיים והנה ראוי שננסה מה יוסיף שני אחד על המעוקב ערכנו נ״ט ראשונים על נ״ט ראשונים ושני אחד והעולה על ג׳ שניים ועלה ב׳ שניים נ״ה שלישיים בקרוב חלקנו עליו הנשאר והנה השרש היוצא מן החלוקה הוא מ״ז והם שניים ונשאר הראוי לפי יחס מ״ו שניים אל נ״ט ראשונים מ״ז [206] שניים שהוא חלק מע״ח בקרוב ערכנו נ״ט ראשונים על נ״ט ראשונים מ״ז שניים והעולה על ג׳ דמיוני מ״ז שניים וחברנו עם העולה מעוקב מ״ז שניים ועלה ב׳ ראשונים י״ח שניים נ״ו כ״ז כ״ג כ״ג גרענום מהנשאר ונשארו קי״ט שלישיים י״ג רביעיים ל״ו ל״ח וראוי שננסה מה יוסיף שלישי אחד על המעוקב ולא נצטרך עוד לבחינה למיעוט היחס אצל השרש והנה עלה כ׳ שלישיים נ״ט רביעיים בקרוב והוא השמור הראשון והנה השרש היוצא הוא מ׳ והם שלישיים ערכנו נ״ט ראשונים מ״ז שניים על נ״ט ראשונים מ״ז מ׳ והעולה על שלשה דמיוני מ׳ שלישיים והברנו עם העולה מעוקב מ׳ שלישיים ועלה קי״ט שלישיים ט׳ רביעיים כ״ה כ׳ נ״ז מ״ו מ׳ גרענוהו מהנשאר ונשאר ד׳ רביעיים י״א כ׳ י״ג כ׳ ואין צריך לדקדק עוד ואם תרצה תוכל לרקדק שתי מעלות יחד וזה שתחלק הנשאר על חלק מששים מהשמור ויעלה בידך רביעי אחד וכ״ה חמשיים והנה השרש אם כן הוא נ״ט ראשונים מ״ז שניים מ׳ שלישיים א׳ רביעי כ״ה חמשיים והקש על זה.

---

[205]) Im Manuscript מכ״ז, auch hier stimmen die Zahlen nicht, [206]) im Manuscr. מ״ח.

וג׳ ראשונים על אחד וג׳ ראשונים י״ג שניים והעולה[201]) על שלשה דמיוני השרש היוצא שהוא י״ג שניים וחברת העולה עם מעוקב י״ג שניים ועלה ב׳ ראשונים י״א כ׳ ל״ו ל״ז גרענום מהנשאר ונשאר ז׳ שניים ל״ב ל״ז מ״ח מ״ז כ״ג ל״ד ל״ג ל״ו חלקנו זה הנשאר על חלק מס׳ מזה השמור הראשון שהוא י׳ שלישיים ו׳ רביעיים והוא השמור השני ועלה מ״ד והם שלישיים ערכת אחד וג׳ ראשונים י״ג שניים על אחד וג׳ ראשונים י״ג שניים מ״ד שלישיים והעולה על שלשה דמיוני השרש היוצא שהוא מ״ד שלישיים וחברת העולה עם מעוקב מ״ד שלישיים ועלה ז׳ שניים כ״ה שלישיים כ״ו נ״ח א׳ נ׳ נ״ג מ״ד גרענום מהנשאר ונשאר ז׳ שלישיים ט׳ נ״א כ״ב כ״ד נ״ט נ״ב חלקנו הנשאר על חלק מששים מהשמור השני שהוא י׳ רביעיים וו׳ [202]) חמשיים בקרוב והוא השמור השלישי ועלה מ״ב והם רביעיים ערכת אחד וג׳ ראשונים י״ג שניים מ״ד שלישיים על אחד וג׳ ראשונים י״ג שניים מ״ד שלישיים מ״ב רביעיים והעולה על שלשה דמיוני השרש היוצא שהוא מ״ב רביעיים וחברת העולה עם מעוקב מ״ב רביעיים ועלה ז׳ שלישיים ה׳ ט״ו נ״ד ו׳[203]) כ״א י״ג כ״ב מ״ח גרענום מהנשאר ונשאר ד׳ רביעיים ל״ה חמשיים כ״ה י״ח כ״ג ל״ד מ״ו ל״ז י״ב ואין צורך לדקדק עוד ואם תרצה עתה תוכל לדקדק לשני מעלות יחד ותהיה קרוב מאד אל המבוקש וזה שאתה אם חלקת הנשאר על הלק מהששי מהשמור השלישי שהוא י׳ חמשיים וו׳ ששיים ועלה כ״ז והם חמשיים וי״ו והם ששיים ולו תחקור תמצא שלא יגיע הקרוב לב׳ שלישיות חמשית אחר ולזה יהיה שרש זה המספר המורד העקוביי אחד וג׳ ראשונים י״ב שניים מ״ד מ״ב כ״ז י״ו ערכנו זה השרש על אלף לפי שההורדות היו ג׳ ועלה אלף תתל״ז ט׳ ראשונים ה׳ שניים ז׳ שלישיים ל״ד רביעיים מ׳ המשיים מ׳ ששיים והתבאר בכמו זה הביאור הקודם במספר המורד להוציא שרשו הרבועי שזהו השרש העקוביי למספר הרב בקרוב ושיחס הקרוב אל הקרוב כיחס המספר אל המספר ר״ל אלף אלפי אלפים וזה שהמספר הגדול ימנה הקטן כמספר אהדי אלף אלפי אלפים לפי שיהס המעוקב אל המעוקב הוא יחס צלעו אל צלעו משולש וכאשר תנהיג זה יתבאר לך בכמו הבאור הקודם שיהס הקירוב אשר ממעוקב השרש הגדול אצל מספר הגדול אל הקרוב אשר ממעוקב השרש הקטן אצל דמספר הקטן הוא גם כן אלף אלפי אלפים.

ד ר ך להוציא שרש מספר מעוקב מונה בלתי מקיף בשלמים העקוביי והשברים אינם משברי חכמי התכונה קח המורה הראשון לכל השברים ואם לא היה המורה מעוקב ערוך המספר על מעוקב המורה או על המורה אם היה מעוקב והעולה הלק על שרש העקוביי שערכת עליו המספר והוא המבוקש דמיון זה אם רצית לדעת שרש מ״ד שלמים וה׳ שביעיות רביעית וג׳ שביעיות שביעית רביעית רביעית וכ״ז שביעיות שביעית רביעית רביעית לקחנו המורה הראשון לאלו השברים ושברי השברים בכלל והיה[204]) המספר המורכב ממספרי ז׳ז׳ז׳ד׳ד׳ד׳ וזה שוה להכאת

[201]) והעולה: fehlt im Manuscript, [202]) im Manuscr. וו׳, [203]) im Manuscr. י״ו, [204]) im Manuscr. והם.

שלמעלה ממנו ואודיעך איך תוריד מספר רב אל מספר מעט אחר שאבאר שהכאת מספר מונה על ג׳ שניים ל״ו שלישיים שוה להלוקו על אלף וזה שאלף פעמים ג׳ שניים ל״ו שלישיים יהיה אחד שלם אם כן ג׳ שניים ל״ו שלישיים הם חלק מאלף באחד שלם וכאשר התישב זה הנה ראוי שתחלוק המספר על אלף והנשאר שלא יבוא לחלוק תכפלהו על ג׳ שניים ל״ו שלישיים והיא ההורדה הראשונה ואם העולה בלתי קטן מאלף תשוב לחלקו על אלף בדרך הקודמת והיא ההורדה השנית וכן לא תסור להוריד עד שיהיה המספר קטן מאלף ותמנה מספר ההורדות ותוציא שרש המספר הקטן ותדקדק עד ששיים או כפי מה שתרצה כי יקל מאד בזה הדרך והעולה בידך תערכהו על המספר המורכב ממספרי עשרה כמספר ההורדות וזה מספרם שוה לאחד מהמעלה אשר מספר גבהם מוסף אחד על מספר ההורדות ויצא לך המבוקש.

דמיון [199]) זה אם רצית להוציא שרש א׳ב׳ג׳ד׳ה׳ו׳ז׳ח׳ט׳ה׳ תורידהו הנה שלשה הורדות כדי שיהיה המספר העולה בידך באחרונה פחות מאלף והנה המספר העולה בידך בהורדה באחרונה ה׳ שלמים נ״ט ראשונים ט״ו ל״ג ז׳ נ״ד ל״ג 0 ל״ד ל״ו תשיעיים והנה המעוקב הקרוב למה שבמדרגה האחרונה שהיא מעוקבת היא אחד ושרשו אחד ותכתוב אחד בטור השרש גרעת מעוקבו מהטור העליון ונשאר ד׳ שלמים נ״ט ראשונים ומה שנמשך לזה מהשברים והנה ידעת שמעוקב שנים יוסיף על מעוקב אחד ז׳ שלמים והנה המדרגה שלפני השרש המוצא היא ממדרגת השברים והלקת הנשאר בטור העליון על הלק מששים מז׳ שלמים שהוא ז׳ שברים ראשונים ועלה מ״ב והם חלקים מששים באחד שלם ולזה יהיו שברים ראשונים ערכת השרש המוצא שהוא אחד על אחד ומ״ב ראשונים וערכת העולה על שלשת דמיוני השרש היוצא שהוא מ״ב ראשונים והברנו עם העולה מעוקב מ״ב ראשונים שהוא השרש היוצא ועלה ג׳ שלמים מ״ב ראשונים ח׳ שלישיים גרענום מהנשאר ונשאר אחד שלם י״ז ראשונים ט״ו כ״ה ז׳ נ״ד ל״ד ל״ג ל״ו והנה ראוי שננסה מה יוסיף ראשון אחד על המעוקב ערכנו השרש המוצא שהוא אחד שלם ומ״ב ראשונים על אחד ומ״ג ראשונים וערכנו העולה על ג׳ דמיוני התוספת שהוא ראשון אחד ועלה בקירוב ח׳ ראשונים מ״ו שניים חלקת עליהם הנשאר ועלה ח׳ והם ראשונים תוספת על השרש המוצא ח׳ ראשונים וערכת א׳ מ״ב ראשונים על ח׳ ונ׳ ראשונים והעולה על כ״ד ראשונים שהוא שלשה דמיוני השרש היוצא שהוא ח׳ ראשונים ועלה אחד שלם י״ד ראשונים נ׳ ל״ב גרענום מהנשאר ונשארו ב׳ ראשונים י״ח שניים נ״ג ז׳ נ״ד ל״ד ל״ג ל״ו והוא הנשאר פחות ממה שיוסיף ראשון אחד על המעוקב והנה ראוי שננסה מה יוסיף שני אחד על המעוקב הזה ערכנו השרש המוצא שהוא א׳ ונ׳ ראשונים על א׳ ונ׳ ראשונים ושני אחד והעולה על שלשה דמיוני התוספת שהוא [200]) ג׳ שניים ועלה י׳ שניים מ״ו שלישיים בקרוב והוא השמור הראשון הלקת עליו הנשאר ועלה י״ג ערכת אחד

---

[199]) Die Rechnung in diesem Beispiel ist nicht richtig, die einzelnen Resultate sind falsch angegeben, und die angegeben stimmen unter sich auch nicht, [200]) שהוא fehlt in Manuscript.

לך מעוקב השרש היוצא ושטח השרש היוצא פחות אחד בשטח השרש המוצא בשלשה דמיוני העולה ערכנו פ"ו שהוא השרש היוצא על פ"ו וראשון אחר וערכנו העולה על ג' ראשונים ועלה שס"ט שלמים נ"ב ראשונים ג' שניים חלקנו הנשאר השני על העולה ועלה מ"ט והם ראשונים אלא שלא ישאר מהנשאר השני כמו יחס מ"ח ראשונים אל פ"ו ומ"ט ראשונים שהוא חלק מק"ט בקירוב לפי [ש]הנשאר הוא כמו ק"מ שלמים בקרוב והוא מהנשאר פחות מחלק מק"ט ולזה לא נכתוב בטור השרש כי אם · מ"ח ראשונים כי אז יספיק לנו הנשאר אל זה היחס ערכנו פ"ו אל פ"ו מ"ח ראשונים והעולה על שלשת דמיוני מ"ח ראשונים ועלה י"ז אלפים תתקט"ו שלמים ול"א ראשונים וי"ב שניים חברנו עם זה מעוקב מ"ח ראשונים שהוא השרש היוצא והוא ל' ראשונים מ"ג שניים י"ב שלישיים גרענו העולה מהשאר השני ונשאר שנ"ד שלמים נ"ה ראשונים ד'[195] שניים מ"ח שלישיים והנה ננסה אם נוסיף שני אחר על השרש המוצא כמה יתוסף המעוקב ערכנו פ"ו שלמים מ"ח ראשונים ושני אחר וערכנו העולה על ג' שניים ועלה בקירוב ו' שלמים י"ז ראשונים ושמרהו כי לא תצטרך לנסיון אחר מבאן והלאה וזה למיעוט יחס השרש היוצא אצל השרש המוצא הלקנו הנשאר על זה השמור ועלו נ"ה והם שניים והעולה על שלשה דמיוני נ"ה שניים ועם העולה חברנו מעוקב נ"ה שניים שהוא השרש היוצא ועלה שמ"ה שלמים כ"ב ראשונים מ"ח כ"ט י"ו י"ב נ"ה גרענוהו מהנשאר ונשאר ג' שלמים ל"ה ראשונים י"ו י"ח מ"ג מ"ז ה' הלקנו על חלק מהששים מהשמור שהוא ו' ראשונים י"ז שניים והוא השמור השני ועלה ל"ד והם שלישיים כי השלישי הוא החלק מהששים מהם וכבר הוסיף השני המעוקב ו' שלמים י"ז ראשונים בקירוב ערכנו השרש המוצא שהוא פ"ו שלמים מ"ה ראשונים נ"ה שניים על פ"ו שלמים מ"ה ראשונים נ"ה שניים ל"ד שלישיים והעולה ערכנו על שלשת דמיוני השרש היוצא שהוא ל"ד שלישיים וחברנו עם העולה מעוקב ל"ד שלישיים ועלה ג' שלמים ל"ג ראשונים ל"ב מ"ד כ"ה כ"ז ל"ז מ"ז נ"ה ד' גרענום מהנשאר ונשאר ראשון אחד[196]) מ"ג ל"ד י"ח[197]) כ"ט כ"ח[198]) נ"ו ד' נ"ו הלקנוהו על הלק מהששים מהשמור השני שהוא ו' שניים י"ז שלישיים והוא השמור השלישי ועלה י"ו והם רביעיים ואין צריך לדקדק עוד ואם תרצה תוכל לדקדק בזה הדרך כפי מה שתרצה והנה שרש זה המספר הדרוש העקובי הוא פ"ו שלמים מ"ה ראשונים נ"ה שניים ל"ד שלישיים י"ו רביעיים וראוי שתדע כי בדרך השנית שנתתי לך בנשאר הראשון אם היתה המדרגה שלפני שרש המוצא שברים ראוי שתחלק על ששים יתרון מעוקב המספר הנמשך אל השרש המוצא לאחריו על מעוקב השרש המוצא וזה מבואר בעצמו.

ד ר ך אחרת להוציא שרש מספר מונה העקוביי אשר יהיו ביסודו שלמים. דע כי המספר שלא יגיע לאלף יקל מאד להוציא שרשו העקוביי בערך אל מה

---

195) Im Manuscript ל', 196) im Manuscript noch ג' (?), 197) muss heissen י"ז, 198) muss heissen כ"ו.

ועלה ו' אלפים ת"פ ערכנו העולה על ג' דמיוני א' מהראשונה שהוא התוספת ועלה י"ט אלפים ות"מ חלקנו הנשאר הראשון על זה העולה ויעלה ז' אלא שלא ישאר מהנשאר הראשון אחר שגרענו מהנשאר מעוקב מספר ז' מהראשונה אלא ה' אלפים וה' מאות וצ"ד והנה יחסו אל הנשאר הראשון פחות מיחס ו' מהראשונה אל פ"ז מהראשונה שהוא השרש המוצא והיוצא וזה שזה היחס הוא חלק מי"ד בקירוב ואם נשים השרש היוצא מן החלוקה ו' [190]) יהיה הנשאר מספיק לזה היחס ר"ל ליחס ה' אל פ"ד [191]) שהוא חלק מי"ז בקירוב לפי שהנשאר הוא כ"ה אלפים תת"ן והוא מוסיף על חלק מי"ז במה שנשאר ולזה יהיה העולה ו' מהראשונה והוא השרש היוצא ונערוך ה' מהשנית שהוא השרש המוצא על השרש המוצא[192]) והיוצא ועלה ו' אלפים תת"פ[193]) ערכנום על ג' דמיוני ו' מהראשונה שהוא השרש היוצא ועלה קכ"ג אלפים תת"מ ואולם מעוקב השרש היוצא הוא רי"ו חברנוהו עם העולה ועלה קכ"ד אלפים ונ"ו גרענום[194]) מהנשאר הראשון ונשאר י"ח אלפים רס"ה ונתברר לנו שלא נוכל להוסיף אחד על השרש לפי שהאחד המוסף על פ' הוסיף על המעוקב י"ט אלפים ותמ"ה והם יותר ממה שישאר לנו עתה ואם רצית להקל מעליך אחר שחלקת על י"ט אלפים ות"מ ושמת העולה ו' ונשאר לך כ"ה אלפים תת"ה אחר גרעון מעוקב מהנשאר תערוך השרש המוצא על השטה ההוה מהשרש היוצא פחות אחד על שלשה דמיוני השרש המוצא והעולה תגרע מכ"ה אלפים תס"ה והוא המבוקש.

משל זה שתערוך פ' על שטח ה' בי"ח ויעלה ז' אלפים ומאתים גרעם מכ"ה אלפים תס"ה וישאר לך י"ח אלפים רס"ה וזה מסכים למה שנשאר קודם ובזה התבאר לך הסבה במה שצויתיך להשמר שיהיה לך היחס הנזכר והיה זה כן לפי שהנערך מפ' אל פ"א הוכה בג' והעולה בו' וזה שוה לשטח פ"א בשטח פ' בי"ח וכבר היה ראוי שיוכה לפי מה שקדם שטח פ"ו בשטח פ' בי"ח והוא מבואר שאם נחבר עם שטח פ"א בשטח פ' בי"ח שטח ה' בשטח פ' בי"ח יהיה העולה שוה לשטח ההוה ממספר פ"ו בשטח פ' בי"ח אשר הוא המבוקש והקש על זה ואם נהגנו בזה הדרך השנית והוא היותר קלה על צד הקירוב נחלק הנשאר שהוא קמ"ב אלפים שכ"א על עשירית יתרון מעוקב ט' מהשנית שהוא המספר הנמשך אל השרש המוצא לאחריו על מעוקב ח' מהשנית והנה היתרון הוא רי"ז אלף ועשיריתו הוא רי"ז עשיריות והם כמו כ"א אלפים וז' מאות חלקנו הנשאר הראשון על כ"א אלפים וז' מאות ועלה ו' שלמים והוא השרש היוצא ערכנו שרש המוצא שהוא פ' על השרש המוצא והיוצא[194]) ועלה ו' אלפים תת"פ ערכנום על שלשה דמיוני השרש היוצא ועלה קכ"ג אלפים תת"מ חברנו עם זה העולה מעוקב היוצא שהוא רי"ו ועלה קכ"ד אלפים ונ"ו גרענום מן הטור העליון ונשאר י"ח אלפים רס"ה והוא הנשאר השני והקש על זה ואמנם בזה הנשאר השני תנסה אם תוסיף ראשון אחד שהוא המדרגה הנמשכת לפני השרש על השרש המוצא שהוא פ"ו כמה יתוסף המעוקב ושמור העולה וחלק הנשאר השני על העולה והשמר שישאר

---

190) ו' fehlt, 161) in Manuscript אלפים, 192) fehlt in Manuscript. 193) in Manuscript תת"כ, 194) fehlt in Manuscript.

שצריך שתשמור שישאר לך מעוקב השרש היוצא בחלוק וישאר גם כן בטור העליון מספר יהיה יחסו אל מה שהלקת כיחס השרש היוצא פחות אחד אל השרש המוצא עם העולה מקובצים רצוני שאם היה השרש ו׳ ממעלה מונחת והיה השרש היוצא ה׳ ממעלה שלפניה הנה ראוי שישאר ממה שחלקת מספר יהיה יחסו אל המספר המחולק כיחס ד׳ אל ס״ה בקירוב וזה קשה מאד בנשאר הראשון אמנם ממנו ולהלאה יספיק דבר מעט שישאר על מעוקב השרש היוצא למיעוט יחס שרש היוצא אל שרש המוצא ולהקל מעליך נתתי לך דרך טובה וקרובה תלך בה בנשאר הראשון והיא זאת חקור כמה יוסיף מעוקב המספר הנמשך אל השרש המוצא לאחריו על מעוקב מספר השרש המוצא ועל עשירית היתרון תחלוק הנשאר הראשון והשרש היוצא מן החלוקה הם אחדים מהמעלה אשר לפני מעלת השרש המוצא ואחר שישלם לך זה אם בדרך הראשונה או בשנית תערוך השרש המוצא על השרש המוצא והיוצא והעולה תערוך על שלשת דמיוני השרש היוצא והבר עם העולה מעוקב השרש היוצא והעולה בידך גרעהו מהנשאר הראשון והנשאר יהיה הנשאר השני ואם לא הגיע הנשאר הראשון לעשירית המספר אשר אמרנו לחלק עליו לא תשפוט מפני זה שלא יהיה אפשר שתשים בשרש המוצא אחד במעלה שלפניו אך תנסה אם תוסיף אחד על השרש המוצא במעלה שלפניה ותכה [187]) העולה על השרש המוצא ותערוך העולה מהכפל על שלשה דמיוני התוספת רצוני האחד המוסף על השרש המוצא ותחבר עם העולה מעוקב התוספת אם יהיה בלתי גדול מהנשאר הראשון תגרעהו מהנשאר הראשון ותשים אחד לפני השרש המוצא ואם היה גדול מהנשאר הנה נתבאר לך שאין בזה השרש דבר מהמעלה ההיא ותשוב לנהוג עם אחד מהמעלה האחרת אשר היא שלישית למעלת השרש המוצא רצוני שתחברהו עם השרש המוצא והעולה תערוך על שלשה דמיוני התוספת שהוסף על השרש המוצא ועל העולה תחלוק הנשאר השני בדרך שישאר לך מעוקב העולה ויותר לפי היחס הנזכר אלא שמספר מעט שישאר עתה מספיק והעולה בידך הוא השרש היוצא ותכתבהו בטור השרש במעלה ההיא ותערוך השרש המוצא על [188]) השרש המוצא והיוצא מקובצים והעולה תערוך על שלשה דמיוני השרש היוצא והבר העולה עם מעוקב השרש היוצא והעולה תגרע מהנשאר אשר בידך וכזה תוכל לדקדק עד שתגיע אל שרש המספר המבוקש.

והנה [189]) נתן לך דמיונים לפי הדרכים האלה אחד אחד.

דמיון זה רצינו בזאת הצורה להוציא שרש א׳ב׳ג׳ד׳ה׳ו׳ ולפי שהמעלה האחרונה אינה מעוקבת הורדנוה אל שלפניה והנה המעוקב הקרוב לזה המספר הוא תקי״ב ויסודו ח׳ ולפי שזאת המעלה היא רביעית שמנו השרש שהוא ח׳ בשנית ומעוקבם תקי״ב מהרביעית גרענום מתרנ״ד שיש לנו ברביעית ונשארו לנו קמ״ב ברביעית והוא הנשאר הראשון עם מה שנשאר בשאר המעלות והנה לפי הדרך הראשון נערוך השרש המוצא שהוא ח׳ בשנית על ח׳ מהשנית א׳ מהראשונה,

---

[186]) In W. המונח, [187]) in W. fehlt bis ותערוך, [188]) in M. I fehlt bis המוצא
[189]) von hier bis השער הששי nur in W.

עשיריים וכזה תוכל לדקדק כל מה שתרצה ואין צורך לדקדק עוד הקרוב בלתי מגיע לששי אחד והקש על זה.

דרך הוצאת השרשים המעוקבים ואנחנו מציעים לבאורו שקצת המספרים אין להם יסוד מספרי עקוביי וזה שכבר הת' שכאשר מעוקב ימנה מעוקב הנה צלעו ימנה צלעו ולזה יחוייב בכל מספר מקיף בשלמים שאין יסודו אחדים שלמים שאי אפשר שימצא לו יסוד מספרי עקוביי וזה שאם היה לו יסוד מספרי היה מספר מעוקב ולפי שזה המספר ימנה האחד שהוא מעוקב הנה צלעו ימנה צלעו ואם היה צלעו מונה צלעו היה יסודו מקיף בשלמים וכבר הונח יסודו בלתי מקיף בשלמים זה שקר אם כן אין מספר מעוקב ולזה יתבאר שאין מספר העשרה מעוקב ולא מספר הששים ושאי אפשר שימצא להם יסוד מספרי עקוביי וכאשר התבאר זה והיו אחדי המעלות מתיחסים ומתחילים מן האחד [184]) והשני שהוא עשרה אינו מעוקב אם כן אין אחד מעוקב זולת הרביעי והשביעי והעשירי והם המדרגות שמספרם מונה שלשה כשהוסר מהם האחד וכזה התבאר שאין במדרגות השברים מעלה מעוקבת זולת השלישיים והששיים והתשיעיים שמספרם מונה שלשה וג"כ הנה מעוקבי המספרים הנמשכים מן האחד עד תשעה הם א' ח' כ"ז ס"ד קכ"ה רי"ו שמ"ג תקי"ד תשכ"ט וכאשר היה זה כן הוא מבואר שכל מספר מעוקב שימצא במדרגה מעוקבת הוא מעוקב לפי שהוא ימנה האחד המעוקב ההוא במספר מעוקב אם כן המעוקב כבר הוכה במעוקב ולזה יהיה העולה מעוקב בהכרח וכזה [185]) הת' שהמספר המעוקב במעלה בלתי מעוקבת הוא בלתי מעוקב וכאשר התישב זה כלו הנה נבאר איך ימצא השרש העקובי למספרים המקיפים בשלמים המעוקבים או הקרוב לבלתי מעוקבים ראוי שתכתוב המספר שרצית לדעת יסודו העקובי בטור אחד כפי מדרגותיו אח"כ תראה אם המעלה האחרונה היא מהמעוקבות ואם לא הורד המספר לפניה עד שתהיה במעלה המעוקבת והמספר שיהיה במעלה ההיא המעוקבת תחקור עליה במעוקבים שזכרנו ותקח המעוקב היותר קרוב אליו ואולם המעט ויסודו ידוע לך והיסוד ההוא תשימהו בטור השרש במעלה אשר נבאר לך והוא שתחלוק מספר גובה המעלה ההיא על שלשה וישאר לך אחד בהכרח חברהו עם העולה מן החלוקה ובמעלה אשר מספרה ככה תשים העולה.

משל זה אם היתה המעלה האחרונה שלש עשרה תחלוק שלש עשרה על שלשה יעלה ארבעה תחברם עם האחד הנשאר מן החלוקה ויהיו חמשה א"כ העולה תשים במעלה החמשית והיה זה כן לפי שהחמשית כאשר הוכתה על עצמה היתה תשיעית עוד הוכתה תשיעית על החמשית והיתה המעלה השלש עשרה והקש על זה . . . גרע מעוקב השרש היוצא מהטור העליון והנשאר שם הוא הנשאר הראשון אח"כ קח השרש המוצא והברהו עם אחד מהמעלה שלפניו וערוך זה על השרש המוצא והעולה תערוך על שלשה דמיוני האחד המוסף ושמור העולה ואם היה השמור פחות מהנשאר הראשון תחלק הנשאר הראשון על השמור אלא

---

[184]) In W. על, [185]) in W. וכאשר.

המורד הוא אלף אלפים וג״כ הנה יחס השרש הגדול אל השרש הקטן הוא אלף ויחס מרובע השרש הגדול אל מרובע השרש הקטן הוא אלף אלפים ולזה יהיה יחס מרובע השרש הגדול אל מרובע השרש הקטן כיחס הטור הראשון אל הטור האחרון וכאשר המירונו הנה יחס מרובע השרש הגדול אל הטור הראשון כיחס מרובע הקטן אל הטור האחרון אבל מרובע השרש הקטן הוא כמו הטור האחרון בקירוב אם כן מרובע השרש הגדול הוא כמו הטור הראשון בקירוב וגם כן הנה מפני שיחס מרובע השרש הגדול אל הטור הראשון כיחס מרובע השרש הקטן אל הטור האחרון והיה מרובע השרש הקטן יותר גדול מהטור האחרון הנה מרובע השרש הגדול יותר גדול מהטור הראשון וכאשר הבדלנו הנה יחס מרובע השרש הגדול אצל יתרונו על הטור הראשון כיחס מרובע השרש הקטן אצל יתרונו על הטור האחרון וכאשר המירונו הנה יחס מרובע השרש הגדול אל מרובע השרש הקטן כיחס יתרון מרובע השרש הגדול על הטור הראשון אל יתרון מרובע השרש הקטן על הטור האחרון אבל יחס מרובע השרש הגדול אל מרובע השרש הקטן הוא אלף אלפים אם כן יחס יתרון מרובע השרש הגדול על הטור הראשון אל יתרון מרובע השרש הקטן על הטור האחרון הוא אלף אלפים והקש על זה.

דרך הוצאת השרשים משברים מונחים משברי חכמי התכונה הקור על המדרגה הגבוהה מכלם אם היא מהזוגות ואם היא אינה מהזוגות הורידה אל שלפניה כדי שתהיה מהזוגות ומהעולה הוצא השרש האמתי או הקרוב אמנם המעט ותשימהו בטור השרש במדרגה הממוצעת בין המדרגה ההיא ובין האחד ואם ישאר לך תורידהו אל מדרגה שפלה עד שתוכל לחלקו על כפל השרש המוצא והעולה בחילוק תשים במעלה אשר מרחקה מהמדרגה המחולקת לאחריה כמרחק המדרגה שחלקת עליה מהראשונה וכפי זה הדרך תדקדק כל מה שתרצה דמיון זה אם רצית להוצא שרש נ״ג[180]) שלישיים מ״א רביעיים נ׳ חמשיים כ״ה ששיים הנה המדרגה היותר גבוהה היא מדרגת השלישיים ואיננה מהזוגות הורידה ויהיו בידך שלשת אלפים ורכ״א והשרש היותר קרוב לזה המספר הוא נ״ו ונכתבם במדרגת האמצעיים בין מעלת האחדים והרביעיים והם השניים ערכנום על עצמם וגרענו העולה מהטור העליון ונשארו לנו פ״ה רביעיים נורידם אל החמשיים ויהיו בידנו ה׳ אלפים וק״נ חמשיים חלקנום על כפל השרש המוצא שהוא קי״ב בדרך שישאר לנו מרובע השרש היוצא ועלה מ״ה ולפי המעלה שחלקנו עליה היא שלישית למדרגת האחדים נשים המ״ה בטור השרש במעלה השלישית לאחור למעלה המחולקת ולזה יהיו אלו המ״ה שלישיים ערכנום על כפל השרש המוצא ועל עצמם וגרענו העולה מהטור העליון ונשאר בטור העליון ע״ו חמשיים נ׳ ששיים נוריד החמשיים אל הששיים ועלה ארבע אלפים ותר״י[182]) חלקנום על כפל השרש המוצא שהוא קי״ג ול״ב חלקים מששים בקירוב ועלה ל״ג[183]) והם לפי מה שקדם חמשיים ערכנום על כפל השרש המוצא ועל עצמם וגרענו העולה מהטור העליון ונשאר בטור העליון נ״ד שביעיים ה׳ שמיניים כ׳ תשיעיים נ״א

---

[180]) In M. I ג״י, [181]) in W. ג׳, [182]) in W. ות״כ, [183]) in W. ל״א.

לחלוק על ל״ו שניים ויצא לנו ג׳ד׳ה׳ז׳ח׳ט׳ וי״ב ראשונים ל״ו שניים וזאת היא ההורדה הראשונה ולפי שמה שיצא לנו הוא בלתי קטן ממאה נשוב לחלק זה הטור שיצא לנו על מאה ולערוך מה שלא בא לחלוק על ל״ו שניים ויצא לנו ה׳ז׳ח׳ט׳ וכ״ה ראשונים נ״ה שניים ל״ג ל״ו והיא ההורדה השנית ונשוב עוד לחלק זה הטור שיצא לנו על מאה על הדרך הקודם ויצא לנו ה׳ בראשונה ט׳ בשניה מ״ה ראשונים ט״ו שניים ל״ג שלישיים כ׳ רביעיים ט׳ חמשיים ל״ו ששיים וזה המספר הוא קטן ממאה ולזה לא נשוב להוריד עוד והנה ההורדות שלשה והנה נחקור על שרש זה המספר הקטן ולפי שהמעלה האחרונה שבטור היה מהזוגות נוריד אל שלפניו ויהיו לנו צ״ה [177]) בראשונה והנה המרובע הקרוב לזה המספר לפניו הוא פ״א ושרשו ט׳ מהראשונה ונכתוב ט׳ בטור השרש במעלה הראשונה גרענו מרובע ט׳ מצ״ה ונשאר לנו י״ז הורדנום אל מדרגת הראשונים ועלה אלף וס״ה וט״ו חלקים מששים על הצד הקודם חלקנום על כפל השרש המוצא שהוא י״ח בדרך שישאר בטור העליון מרובע השרש היוצא ועלה נ״ו והם ראשונים לפי מה שהתבאר קודם ושם נכתבם בטור השרש ערכנום על כפל השרש המוצא ועל עצמם וגרענו העולה מהטור העליון ונשאר בטור העליון ד׳ ראשונים נ״ט [178]) שניים ומה שנמשך להם מן השברים הורדנו הראשונים למדרגת השניים והנה רצ״ט ול״ג חלקים מששים חלקנום על כפל השרש המוצא שהוא י״ט שלמים ונ״ב חלקים מס׳ בדרך שישאר לנו מרובע השרש היוצא מן החלוקה ועלה ט״ו והם שניים ערכנום על כפל השרש המוצא ועל עצמם וגרענו העולה מהטור העליון ונשאר לנו בטור העליון שני אחד כ״ט שלישיים ל״ה רביעיים ט׳ חמשיים ל״ו ששיים וכאשר נהגנו בכמו זה המנהג מצאנו זה השרש בקירוב גדול ט׳ שלמים נ״ו ראשונים ט״ו שניים ד׳ שלישיים ל׳ רביעיים כ״ו חמשיים נ״ב ששיים נ״ב שביעיים והקרוב היה לתוספת אצל המרובע ב׳ שביעיים מ״ב שמיניים ז׳נ׳ל׳ ל״ה ל״ה נ״ג ד׳ שמרהו ולפי שההורדות יהיו שלשה נערוך זה השרש על אלף כי המספר המורכב מג׳ דמיוני עשרה הוא אלף והנה העולה הוא ט׳ אלפים ותתקל״ח שלמים ל״ז ראשונים ט״ו שניים ז׳ שלישיים כ״ח רביעיים ג׳ חמשיים ו׳ ששיים מ׳ שביעיים והוא שרש המספר המבוקש בקירוב . . . ולדעת הקירוב ערוך הקירוב הראשון ששמרת על מרובע אלף שערכת עליו השרש והנה הקירוב אל הצד שהיה אליו הקירוב הראשון ולזה יהיה הקירוב הראשון ט׳ [179]) רביעיים מ״ד חמשיים י״ח ששיים ל״ב שביעיים 0 ל״ה ל״ד ל״ד ד׳ כ״ו מ׳ וזה קירוב גדול לזה המספר הרב לפי שזה הקירוב איננו מגיע למרובע לרביע אחד מן השברים השלישיים והקש על זה . . .

והיה זה כן לפי שמספר הטור הראשון ימנה הטור השני המורד במספר מה שבמאה מן האחדים אם כן הטור השני יוכה במאה ויהיה כמו הטור הראשון וכזה הת׳ שהטור המורד האחרון יוכה במורכב משלשה דמיוני מספר מאה שהוא אלף אלפים ויהיה כמו הטור הראשון א״כ יחס הטור הראשון אל הטור האחרון

---

[177]) In W. צ״ח ז׳, [178]) in W, כ״ט, [179]) in W. מ״א,

א׳ב׳ג׳ד׳ה׳ו׳ז׳ ומ׳ ראשונים ול׳ שניים הנה תוצא השרש הקרוב על הצד הקודם ויעלה ו׳ו׳ז׳ב׳ [170]) ונשאר בטור העליון ג׳ אלפים וה׳ מאות וס״ה שלמים מ׳ ראשונים ל׳ שניים הורדנו השלמים למדרגת הראשונים ויהיו בידינו מאתים אלף וי״ג אלפים וט׳ מאות ומ׳ ובמדרגה שלפניהם ל׳ והם חלקים מששים חלקנו העולה על כפל הטור התחתון שהוא ה׳ אלפים וה׳ מאות ול״ב בדרך שישאר כמו מרובע השרש היוצא ועלה ל״ח והם ראשונים לפי מה שקדם וישם נכתבם בטור השרש ערכנום על כפל השרש המוצא ועל עצמם וגרענו העולה מהטור העליון ונשאר בטור העליון ס״א [171]) שלמים מ׳ ראשונים כ״ו שניים שהם ג׳ אלפים ות״ש ראשונים וכ״ו שניים וזה פחות מכפל השרש המוצא שהוא ה׳ אלפים וה׳ מאות ול״ג שלמים וי״ו חלקים מששים הורדנו[172]) הנשאר בטור העליון למדרגת השניים ויהיו בידינו מאתים אלף וכ״ב אלפים וכ״ו הלקנום על כפל השרש המוצא ועלה מ׳ והם שניים לפי מה שקדם וישם נכתבם בטור השרש ערכנום על כפל השרש המוצא ועל עצמם וגרענו העולה מהטור העליון ונשאר בטור העליון י״א ראשונים ל״ד שניים י״ג [173]) שלישיים כ׳ רביעיים שהם תרצ״ד [174]) שניים י״ג שלישיים כ׳ רביעיים וזה פחות מכפל השרש המוצא ולזה נוריד כל זה למדרגת השלישיים ועלה מ״א אלפים ותרצ״ג וכ׳ חלקים מששים הלקנום על כפל השרש המוצא שהוא ה׳ אלפים ה׳[175]) מאות ול״ג וי״ח חלקים מששים ועלה ז׳ שלישיים ערכנום על כפל השרש המוצא ועל עצמם וגרענו העולה מהטור העליון ומצאנו שהגענו אל השרש הדרוש בקירוב גדול כי הנשאר בטור העליון אינו מגיע לשני אחד והוא מעט כשיוקש אל מה שראוי שיתחלף השרש האמתי בעבורו ואם תרצה תוכל לדקדק עוד ואין צורך.

ד ר ך [176]) אחרת כשהיה בשרש שלמים דע כי כל אשר יהיה המספר שתבקש לדעת שרשו יותר גדול תהיה הוצאתו יותר בקושי ואודיעך איך תעשה ממספר גדול מספר מעט אחר שאבאר לך כי כפל מספר בל״ו שניים הוא שוה לחלוקו אל מאה וזה כי ל״ו שניים הוא חלק אחד ממאה באחד כי השניים אשר באחד הם ל״ו מאות וכאשר התבאר לך זה הנה תחלוק על מאה המספר הגדול וזה החלוק יקל מאד במה שיגיע ממנו לחלוק ומה שלא יגיע ממנו לחלוק תערכהו על ל״ו שניים והעולה בידך מהשלמים והשברים הוא המספר הגדול מורד פעם אחת ואם לא היה זה המספר המורד פחות ממאה תשיב להוריד אותו בזה הדרך עד שיגיע פחות ממאה והמספר האחרון המורד הוא המספר המבקש יסודו והנה תמצאהו בקלות גדול ותדקדק עד חמישיים או עד שלישיים כדי שיהיה החשבון בקירוב מופלג וכאשר תמצאהו תמנה מספר ההורדות וקה המספר המורכב ממספרי עשרה כמספרי ההורדות וזה מסבים למעלה אשר מספרה מוסיף אחד על מספר ההורדות ועל העולה ערוך השרש שיש לך ומה שיגיע מן הכפל הוא המבוקש... דמיון רצינו שנוציא שרש א׳ב׳ג׳ד׳ה׳ו׳ז׳ח׳ט׳ חלקנו זה המספר על מאה וערכנו הנשאר שלא בא

---

170) In W. ו׳ו׳א׳ב׳, in M. II ו׳ו׳ז׳ב׳, 171) in M. II פ״א, 172) in M. II fehlt bis ועלה, ebenso in W., 173) in M. II נ״ג, in W. ל״ג, 174) in M. II u. W. תרצ״ה, 175) in M. II u W. ח׳, 176) bis Schluss fehlt in M. II.

השרש המוצא הורדנוהו אל שלפניו עם ו׳ שהיו בה והנה י״ו ולא נוכל לחלק[167]) על כפל ט׳ הורדנו הי״ו אל שלפניה והנה קס״ד חלקנום על כפל השרש המוצא שהוא י״ח ועלה ט׳ והוא השרש היוצא ונכתבם בטור השרש ברביעית לאחור במדרגת קס״ד ערכנום[168]) על כפל השרש המוצא ועל עצמם והעולה גרענו מהטור העליון ונשאר בו א׳ח׳א׳ח׳א׳ הלקנום על כפל השרש המוצא והוא על צד הקודם י״ח אחדים וב׳ עשיריות ועלה אחד בראשונה בקרוב ונכתבהו בראשונה בטור השרש ערכנוהו על כפל השרש המוצא ועל עצמו וגרענו העולה מהטור העליון ולא נשאר בטור העליון דבר והנה שרש זה המספר הדרוש הוא ט׳ אלפים וצ״א והוא המבוקש . . . ואם תרצה תוכל לבחון זה בשתכה טור השרש על עצמו ויצא לך הטור העליון והיה זה כן לפי שכבר התבאר שכאשר הוסף מספר על מספר הנה מרובע שני המספרים מקיבצים שוים למרובעי שני המספרים ולכפל שטח זה בזה.

ד ר ך הוצאת השרשים מהמספרים המרובעים אשר הם בלתי מקיפים באחדים שלמים ולא היו השברים בהם משברי חכמי התכונה הוצא המורה הראשון אל השברים ההם ר״ל המספר המעט שימנה מורי השברים ההם בכללם ועליו אם היה מרובע או על מרובעו אם לא היה המורה הראשון מרובע תערוך המספר ההוא ותוצא שרש העולה והלקהו על שרש המספר אשר כפלת עליו המספר המונח והעולה הוא המבוקש . . . . דמיון אם רצית לדעת שרש פ״ב שלמים ורביע וב׳ שביעיות שביעית הנה המורה הראשון לאלו השברים הוא לפי מה שהתבאר מאקלידס קצ״ו והוא המספר המורכב מד׳ ומ״ט שהם מרובעים ולזה יהיה קצ״ו מרובע ערכנו עליו זה המספר ועלה ט׳ב׳א׳ו׳א׳ לקהנו שרשו ועלה קכ״ז הלקנוהו על שרש קצ״ו שהוא י״ד ועלה ט׳ וחצי שביעית וככה המבוקש והקש על זה . . . והיה זה כן לפי שכבר התבאר שכאשר הוכה מספר מרובע במרובע שיסוד העולה הוא המספר המורכב מיסודי שני המרובעים אם כן העולה ימנה היסוד האחד כמספר אחדי יסוד האחר.

ד ר ך להוצאת שרש מספר בלתי מרובע שיהיה בשרשו שלמים בקירוב גדול הוצא תחלה השרש הקרוב למספר ההוא בדרך שזכרנו עד שישאר לך בטור העליון פחות מכפל השרש המוצא מקובץ עם אחד שהוא מרובע השרש היוצא והנשאר לך תורידהו אל הראשונים וחלק על כפל כל מה שבטור השרש כשתורידהו למעלת האחדים והזהר שישאר לך בטור העליון כמו מרובע השרש היוצא והעולה יהיו ראשונים לפי מה שקדם ערכם על כפל השרש המוצא ועל עצמם וגרע העולה מהטור העליון והנשאר לך אם הוא פחות מכפל השרש היוצא נחבר עם אחד תורידהו אל המעלה שלפניה ותשוב לחלק על כפל השרש המוצא כשתוריד כל השלמים אל המעלה הראשונה והשברים אשר לפניהם יהיו חלקים מששים והשרש היוצא[169]) הוא לפי מה שקדם ממעלת השברים אשר חלקנו ישם תכתבהו בטור העולה ערכהו על כפל השרש המוצא ועל עצמו והעולה גרע מהטור העליון ובזה הדרך תוכל לדקדק כפי מה שתרצה — דמיון זה אם רצית למצא שרש מספר

---

167) In M. II fehlt לחלק, 168) in M. II fehlt bis המוצא, 169) in W. und M. II והיוצא.

מספר מרובע שימצא במעלות הנפרדות הוא מרובע לפי שהמספר ההוא ימנה האחד מזאת המעלה שהוא מרובע במספר אחדי מספר מרובע אם כן העולה הוא שטח מספר מרובע במספר מרובע שהוא מרובע לפי מה שקדם ובכמו זה התבאר שאי זה מספר מרובע שימצא במעלות שהם זוג אי אפשר שיהיה מרובע וכזה הת' במעלות השברים משברי חכמי התכונה שכל מעלה שהיא זוג אחדיה מרובעים והמעלות הנפרדות אין אחדיהן מרובעים וזה שמספר הששים איננו מרובע ובהיות הענין כן יתחייב שלא יהיה השבר הראשון מרובע לפי שהוא ימנה האחד והוא מרובע במספר ששים והוא בלתי מרובע אם כן אין השבר הראשון מרובע ואומר שהשבר השני מרובע וזה שיחס האחד אל הראשון כיחס הראשון אל השני א״כ שטח הראשון בעצמו כמו שטח האחד בשני אבל שטח האחד בשני הוא שני אחד אם כן השני מרובע ויסודו הראשון וכזה התבאר שהרביעי מרובע וזה שיחס האחד אל השני כיחס השני אל הרביעי א״כ שטח האחד ברביעי הוא שטח השני בעצמו אם כן הרביעי מרובע וכזה התבאר שכל מעלות הזוגות הם מרובעות ולזה התבאר שאי זה מספר שיהיה במעלות אשר הם זוגות הוא מרובע לפי שאחדיה מרובעים וכזה יתבאר זה גם כן בצד הביאור אשר באר אקלידס כי האחד לפי שהוא מרובע השלישי[162]) לו מהאחדים המתיחסים הוא מרובע ולזה יהיה השני מרובע והרביעי מרובע ומה שימשך מזה מהמעלות הזוגות.

דרך הוצאת השריש מהמספר המרובע המקיף בשלמים ראוי שנכתוב המספר שבקשנו לדעת את[163]) מרובעו בטור אחד כפי מעלותיו אחר כך חקור על המעלה האחרונה שבטור אם היא מהנפרדות ואם לא היתה מהנפרדות הורידה אל שלפניה כדי שיהיה המספר האחרון שבמעלה נפרד. אחר כך ראה המרובע היותר קרוב אל זה המספר ואמנם המעט ויסוד המרובע ההוא תכתוב בטור השריש תחת הטור הקודם במעלה האמצעית בין המעלה הראשונה והמעלה האחרונה והוא אשר נקראה הטור היוצא ומרובע השריש היוצא תגרע מהטור העליון והנשאר תחלוק על כפל השרש היוצא אך השמר שישאר לך אחר החלוקה כמו מרובע השריש היוצא לך מן החלוקה והעולה בחלוק והוא השריש היוצא תכתבהו בטור השריש במעלה אשר מרחקה לאחור מהמעלה שהלקת כמרחק המעלה שהלקת עליה מהראשונה ותערוך זה השריש היוצא לך מן החלוקה והעולה בחלוק תכתבהו בטור השרש במעלה הראויה מצד הקודם והשריש היוצא מן החלוקה תערוך על כפל השריש[164]) המוצא ועל עצמו והעולה תגרע מהטור העליון וכן תעשה עד שלא ישאר בטור העליון דבר . . . דמיון זה אם רצית להוציא שריש א'ה'ב'ו'ד'ז'ב'ה'[165]) ולפי שהמעלה האחרונה היא שמינית תורידה אל שלפניה והנה פ״ב והנה פ״א הוא המרובע היותר קרוב לזה המספר ושרשו ט' תכתוב ט' בטור השריש ברביעית שהיא אמצעית בין השביעית[166]) והראשונית והנה מרובע ט' מהרביעית היא פ״א מהשביעית נרענום מפ״ב ונשאר אחד בשביעית ולא נוכל לחלק על כפל ט' שהוא

---

[162]) השלישי fehlt in W., ebenso in M. II, [163]) so in allen Hdschr., [164]) in W. und M. II כל השרש, [165]) in W. א'ב'ח'ו'ד'ו'ב'ח', in M. II א'ה'ב'ו'ד'ז'ב'ח', [166]) in W. הרביעית.

הששיים ולחלק על השמור ויהיה העולה רביעיים לפי מה שקדם ואין צורך כי כבר הגענו אל קירוב גדול . . . . ובכאן נשלם הביאור בחלוק מספר על מספר בכל אופני החלוקה.

	מה	ז					
	ל	0	מב				
			יא	כא			
			טו	נא	יא		
טור הנחלק					מ	ל	ז א
טור העולה					נח	יו	ה 0 ה א
					א		
טור שחלקנו עליו			מה	נב	מא		
			מה	ח	כח	ל	ז א
			יב נב	יב	ז		
	ל	מג יו	נ לח		לט		
	מה	נד	מא				

ואחר שהתבאר דרך חלוק מספר ידוע על מספר ראוי שנבאר דרך חלוק מספר ידוע על מספר בלתי ידוע כמו הוצאת השרשים הרבועיים והמעוקבים ממספרים המונחים ונבאר תחלה דרך הוצאת השרשים הרבועיים ונציע לביאורו הביאור שא״א׳ שימצא יסוד מספרי למספרים המקיפים בשלמים שאין יסודם אחדים שלמים וזה שהאחד הוא מרובע וכבר ידעת מה׳ מאקלידס י״ד שכאשר ימנה מרובע מרובע הנה צלעו ימנה צלעו והאחד ימנה כל מספר ואם היה זה המספר מרובע הנה האחד מונה את יסודו אבל האחד לא ימנהו אם כן אין מספר מרובע ולזה יתבאר שא״א׳ שיהיה לזה המספר יסוד מספרי משל זה שמספר העשרה אין יסודו מקיף בשלמים לפי שמרובע שלשה הוא תשעה ומפני שהעשרה מוסיף על תשעה יהיה יסודו מוסיף על יסודו ובזה יתבאר שיסוד עשרה הוא פחות מארבעה לפי שמרובע ארבעה הוא ששה עשר א״כ אין יסוד עשרה מקיף בשלמים והנה עשרה ימנהו האחד שהוא מרובע ואם היה עשרה מרובע היה יסוד העשרה ימנהו יסוד האחד שהוא אחד וזה כבר התבאר שהוא שקר אם כן אין למספר עשרה יסוד מספרי לא נשבר ולא בלתי נשבר ולזה יקרא יסודו הוא מדבר בכח לבד והקש על זה וכאשר התישב זה נודיעך אי זה מהמדרגות יתכן שילקח השרש מהם ואי זה מהם לא יתכן לו בם [161].

דע כי מרובעי המספרים הנמשכים מן האחד עד עשרה הם מספר א׳ ד׳ ט׳ ששה עשר כ״ה ל״ו מ״ט ס״ד פ״א ולפי שאחדי המעלות מתיחסים ומתחילין מן האחד והשני שהוא עשרה בלתי מרובע הנה אין שם אחד מרובע אלא הראשון והשלישי והחמשי וכן כל המעלות הנפרדות וכאשר התישב זה התבאר שאי זה

161) In M. II u. W. לא ילקח זה בם.

ד ר ך החלוקה כאשר היתה המדרגה האחרונה שבטור התחתון ממדרגת השברים דע כי חלוק שברים על שברים ממינם הוא שלמים וחלוק שברים יותר גבוהים מהם הוא מהמדרגה אשר מרחקה מהשלמים לפניה כמרחק השברים המחולקים מהשברים אשר חולק עליהם והסבה מבוארת ממה שקדם דמיון זה אם נחלק שניים על שניים יהיה העולה שלמים ואם נחלק שלישיים על ראשונים יהיה העולה שניים והקש על זה.

אם רצית לחלק מספר מה על מספר מה והיתה המדרגה האחרונה שבטור שתחלוק עליו ממדרגת השברים הסתכל על המדרגה האחרונה שבטור העליון אם היא יותר גבוהה ממדרגה האחרונה שבטור התחתון אז תורידהו אל המדרגה שבטור התחתון עד שתהיה המדרגה האחרונה שבטור העליון היא בעינה המדרגה האחרונה שבטור התחתון ואז תחלק האחרונה שבטור העליון עם החלקים מששים אשר לפניה על הצד הקודם על השמור והעולה יהיו שלמים ותערכם על הטור התחתון ותגרע העולה מהטור העליון עוד תחלק הנשאר במעלה האחרונה שבטור העליון על השמור והעולה תשים במעלה הראויה ותערכהו על הטור התחתון ותגרע העולה מהטור העליון וכן תעשה עד שתגיע שלא ישאר לך בטור העליון דבר או שיהיה מעט מה שישאר לך שם . . . . דמיון זה רצית לחלק שבעה עשר שלמים ול' ראשונים ומ' שניים על מ״א שניים[159]) ונ״ב שלישיים ומ״ה רביעיים ולפי שהמעלה האחרונה שבטור התחתון היא שניים נוריד מה שאחר השניים בטור העליון אל מדרגת השניים ולזה נוריד השבעה עשר אל מדרגת הראשונים ויהיו אלף וכ' ול' שהיו שם והנה אלף ונ' ראשונים הורדנום אל מדרגת השניים ועלה ס״ג אלפים ומ' שניים ואלה יהיו לאחדים בידך והנה מה שבמדרגה האחרונה שבטור התחתון הוא מ״א ונחשבו כמו אחדים ומה שלפניהם הוא לפי מה שקדם נ״ג חלקים מששים ולזה יהיה השמור מ״א ונ״ג חלקים מששים הלקנו ס״ג אלפים ומ' על מ״א ונ״ג חלקים מששים ועלה אלף וחמש מאות והמשה ערכנו אלף ותק״ה על הטור התחתון ועלה י״ז שלמים ל' ראשונים כ״ה שניים ה' שלישיים מ״ה רביעיים גרענו העולה מהטור העליון ונשאר י״א שניים נ״א שלישיים ט״ו רביעיים ולא נוכל לחלק מה שבמדרגה האחרונה שבטור העליון על השמור ולזה נוריד אל השלישיים ויהיו לנו תשי״א וט״ו חלקים מששים הלקנום על השמור ועלה י״ו והם ראשונים לפי מה שקדם ערכנו י״ו ראשונים על הטור התחתון וגרענו העולה מהטור העליון ונשאר בטור העליון מ״א שלישיים י״א רביעיים ולא נוכל להלק מ״א וי״א חלקים מששים על השמור ולזה נוריד השלישיים על הרביעיים ויהיו לנו אלפים תע״א ונחלקם על השמור ועלה נ״ה והם שניים לפי מה שקדם ערכנום על הטור התחתון וגרענו העולה מהטור העליון ונשאר בטור העליון ל' ששיים מ״ב רביעיים והנה נוכל להלק האחרון שבטור העליון על השמור ועלה אחד והוא שני לפי מה שקדם ערכנוהו על הטור התחתון וגרענו העולה מהטור העליון ונשארו בטור העליון ז' [160]) המשיים מ״ה ששיים ואם תרצה תוכל לדקדק עוד ולהוריד המשיים אל

---

[159]) In allen Hdschr. ראשונים, [160]) in M. I u. M. II fehlt ז', in W. ה'.

ז׳ בטור האמצעי במעלה השניה ונערכהו על הטור התחתון וכאשר הנהגנו זה על הצד שזכרנו תמצא העולה ז׳ מהמעלה השניה ה׳ [156]) מהמעלה הראשונה ונשאר בטור העליון שלא הגיע לחלוק מ׳ ראשונים י״ב שניים ל׳ שלישיים והקש על זה.

	כח	ד		
	כח	נב	ב	
	ל	יב	מ	0 0
		טו	כ	ז ד
טור הנחלק		נ	מ	0 0 ז
טור העולה		יח	ד	ה ז
טור שחלקנו עליו	ל	0	כ	ט
		לה	כ	ג ה ו
	ל	ב 0	מ	ו ד
	ב	כ	א לו	
	0	ו מב	ב	

דרך לחלק מה שלא הגיע לחלוק כשהיו בטור התחתון שלמים ונציע לביאור זה שחלוק שברים אי זה שיהיו על שלמים הם שברים מהמעלה ההיא בעינה וזה מבואר מצד הכפל וכאשר התישב לך זה הנה תראה כמה מן הראשונים נשארו לך בטור העליון כשתשיב האחרון שבטור העליון למדרגת הראשונים והמספר ההוא שיהיה לך מן הראשונים יהיו לאחדים בידך ומה שבמדרגה שלפניה יהיו חלקים מששים והעולה תחלוק על השמור [157]) והעולה בידך הם ראשונים כתבם במקומותם בטור העולה וערכם על כל הטור התחתון שתחלוק עליו והעולה תגרע מהטור העליון עוד תחלוק האחרון שבטור העליון על השמור ואם לא תוכל לחלק תורידהו אל המדרגה שלפניו ובזה הדרך תוכל לדקדק עד אין קץ ואילם דרך לקיחת השמור הנה יהיה שתוריד כל מה שבטור התחתון מן השלמים אל [158]) המעלה הראשונה והעולה יהיה לאחדים בידך ומה שלפני המעלה הראשונה יהיו חלקים מששים על הצד הקודם וזה יהיה לך דרך לקיחת השמור במה שלא הגיע לחלוק כאשר היו בטור התחתון שלמים דמיון זה במה שנשאר במשל הקודם שלא הגיע לחלוק חלקנו מ׳ וי״ב חלקים על השמור שהוא ט׳ וכ״א מששים ועלה ד׳ חלקים והם ראשונים מפני שחלקנו ראשונים על שלמים ערכנו ד׳ ראשונים על הטור התחתון ועלה ל״ז ראשונים כ׳ שניים ב׳ שלישיים וגרענו זה מהטור העליון ונשאר שם ב׳ ראשונים נ״ב שניים כ״ה שלישיים ולא נוכל לחלק ב׳ ראשונים על השמור הורדנום אל השניים והנה קע״ב וכ״ה חלקים מששים חלקנום על השמור וגרענו העולה מהטור העליון ונשאר שם ד׳ שניים כ״ח שלישיים נ״א רביעיים ובזה הדרך תוכל לדקדק עוד לשלישיים ורביעיים ולזולתם ואין צורך לדקדק אחר שתגיע אל החשבון בקירוב.

---

156) In allen Hdschr. ד׳, 157) השמור fehlt in M. II, 158) in allen Hdschr. כל.

ותשים הנשאר כפעם בפעם במקום הראוי וכן כשתגיע להכות השלמים על השברים תכה גם כן כל השלמים שבטור העליון יחד על השברים שבטור התחתון כפעם בפעם דמיון זה רצינו בזאת הצורה להכות נ"ז שניים וט' ראשונים ופ"ג שלמים על שבעת אלפים ותשעים ומ' שניים ונ"א שלישיים וג' רביעיים הכינו נ"ז שניים על ג' רביעיים ועלה[148]) ב' חמשיים ונ"א ששיים הכינו נ"ז שניים על נ"א שלישיים ועלה[149]) מ"ה רביעיים וכ"ז חמשיים הכינו[150]) נ"ז שניים על מ' שניים ועלה ל"ה[151]) שלישיים הכינו נ"ז שניים על ז' אלפים וצ' שלמים ועלה ל' שניים ט"ו ראשונים וב' בראשונה א' בשנייה א' בשלישית וכאשר הנהגו בכמו זאת ההנהגה עד שיוכו כל מספרי הטור העליון על מספרי הטור התחתון תמצא העולה נ"א ששיים נ"ו חמשיים ל"ו רביעיים כ"ג שלישיים ז' שניים ל"ב ראשונים ה' שלמים ד'ו'ט'ח'ה' והקש על זה.

				נז	ט	ג ח
		ג	נא	מ	0	0 ט 0 ז
נג	ב כז	מה 0	לח 0	ל 0	טו	ב א א
	כז	לט 0	ז 0	ו	ל 0	ג ו 0 א
		ט	ד לג	י כ	א נה	0 ז ד ח ח ה
נא	נו	לו	כג	ז	לב	ה ד ו ט ח ה

ואם תרצה לחלק מספר מה על שלמים[152]) ושברים מאלה השברים אשר אנחנו בהם תכתוב המספר שרצית לחלק בטור העליון במקומותיו בדרך שתוכל לכתוב העולה בין שני אלו הטורים כמו שעשית במה שקדם אחר כך תראה מה שבמעלה האחרונה שבטור התחתון והיו לאחדים בידך וכל המספרים אשר לפני המעלה הנמשכת לה לפניה תחשוב אחד במעלה הנמשכת לה לפניה ותחברהו עם המספר שבה ואם היתה זאת המעלה שלפני האחרונה שלמים יהיה זה[153]) המספר עשיריות ואם היתה זאת המעלה שלפני האחרונה שברים יהיה זה המספר חלקים מששים וחברהו עם האחדים שבמעלה האחרונה והוא השמור ועליו תחלוק המעלה האחרונה שבטור העליון עם מה שבמעלה לפניה אם עשיריות ואם חלקים מששים והעולה תשים במעלה הראויה לפי מה שקדם וערכהו על הטור התחתון והעולה גרע מהטור העליון וכן תעשה עד שישאר לך פחות מהטור שחלקת עליו . . . .
דמיון זה רצינו שנחלוק ז' מאות ומ' ראשונים ונ' שניים על ט' שלמים וכ' ראשונים ול' שלישיים והנה נחשוב המספרים שלפני המעלה הנמשכת לאחרונה שבטור התחתון אחד[154]) בה וכ' שמצאנו בה והנה כ"א[155]) והם חלקים מששים ובמעלה האחרונה ט' והם אחדים והנה השמור הוא ט' אחדים וכ"א חלקים מששים חלקנו על השמור המספר שבמעלה האחרונה שבטור העליון שהוא שבעים אחר שהורדנוהו אל המעלה שלפניה ועלה ז' מהמעלה השנייה לפי מה שקדם ונכתוב

148) In W. ועל, 149) in W. ועל, in M. II ועלה מכ"ח וכ"ח המציים, in W. וכ"ה, 150) in W. fehlt bis zum nächsten הכינו, 151) in M. II ל"ו, 152) in M. II u. W. על שברים, 153) in M. I בה, 154) in W. אשר, 155) in allen Hdschr. נ"א

על זה, ואם רצית להלק שלמים ושברים על שלמים ושברים קח המורה הראשון למורה כל השברים ועליו תערוך הטור שרצית להלק ותשים העולה בטור אחד עוד תערוך על המורה הטור שרצית להלק עליו ותשים העולה בטור שני תחת הטור האחר בדרך שתוכל לישום טור העולה בין שני הטורים וכאשר[145]) ישלם זה חלק הטור העליון על הטור התחתון והעולה הוא המבוקש דמיון זה אם רצית להלק פ״ד וג׳ חמשיות וג׳ רביעיות על י׳ וב׳ שלישיות וג׳ שמיניות הנה המורה הראשון לכל אלו השברים הוא ק״כ ערכנו פ״ד וג׳ חמשיות וג׳ רביעיות על ק״כ ועלה עשרת אלפים רמ״ב והוא הטור שתחלק ערכנו י׳ וב׳ שלישיות וג׳ שמיניות על ק״כ ועלה אלף שכ״ה והוא הטור שתחלק עליו חלקת הטור העליון על הטור התחתון ועלה ז׳ שלמים ותתקס״ז חלקים מאלף שכ״ה באחד וכבה המבוקש והיה זה כן לפי שכבר לוקחו לפ״ד וג׳ חמשיות וג׳ רביעיות והוא הראשון ולמספר י׳ וב׳ שלישיות וג׳ שמיניות והוא השני כפלים שוים והם ק״כ אם כן יחס כפלי הראשון הלקוחים אל כפלי השני כיחס הראשון אל השני אבל יחס כפלי הראשון אל כפלי השני הוא ז׳ שלמים ותתקס״ז חלקים מאלף שכ״ה באחד אם כן יחס הראשון אל השני הוא ז׳ שלמים ותתקס״ז חלקים מאלף שכ״ה באחד והקש על זה ואם תרצה לבחון זה הכה ז׳ שלמים ותתקס״ז חלקים מאלף שכ״ה באחד על י׳ וב׳ שלישיות וג׳ שמיניות ויצא לך פ״ד וג׳ חמשיות וג׳ רביעיות.

ואחר שהתבאר זה ראוי שנבאר לך אופן החלוק לפי שברי חכמי התכונה וכבר ידעת שהכאת שברים על שברים הוא מהמעלה אשר מרחקה מהמכה לפניה כמרחק המוכה ממעלת האחדים וכאשר התישב זה אתן לך דרך לכפול שלמים ושברים ומזה תוכל לדעת אופני הכפלת[146]) שברים בכל אופניהם . . . כאשר תרצה לכפול שלמים ושברים משברי חכמי התכונה על שלמים ושברים משבריהם ג״כ ראוי שנכתוב המספר אשר אחז יותר מעט מהמדרגות בטור אחד כפי מדרגתו ותעשה רושם בין השלמים והשברים על הדרך אשר זכרנו במה שקדם ואחר תכתוב המספר האחר בטור אחר תחתיו כפי מדרגותיו ותכה הראשון שבטור העליון על הראשון שבטור התחתון ותשים העולה במעלה הראויה ואם עלה יותר מששים תחלוק העולה על ששים והעולה בידך יהיו אחדים במעלה שלאחריו והנשאר תשים במעלה הראויה ואם[147]) עלה יותר מששים במעלה שלאחריה תשוב להלק העולה על ששים וכן עד הגיעך למעלות האחדים ומשם והלאה לא תחלוק כי אם על עשרה והסבה מבוארת וכזה תעשה עד שיוכו כל מספרי הטור העליון על כל מספרי הטור התחתון ויהיו טורי העולה כמספר המדרגות שבטור העליון אשר בהם מספר זולת השלמים שלא יהיה להם כי אם טור אחד כמה שיהיו עוד תחבר כל מה שבטורי העולה בטור שפל תחתיהם והעולה הוא המבוקש וכאשר תגיע להכות השברים על השלמים תכה אותם יחד על כל השלמים שבטור התחתון כדי שלא יתבלבל עליך ותהלק העולה על ששים על הצד הקודם

---

145) In M. II . . . וכאשר נחלק חלק הט״ר העליון ע׳ הטור התחתון והעולה, 146) in M. I und M. II הכפל לשברים, in W. הכפל תשברים; muss heissen: הכפלת שברים, 147) in W fehlt bis תשוב.

רביעיות ועלה שלישית חברנו כל העולה ועלה רצ״ו שלמים וב׳ חמשיות וז׳ חלקים מתק״ם באחד וזה המבוקש וכן ההקש אם היו שם שברי שברים כי כבר ידעת אופן הכאתם ופעמים תצטרך למלאכות רבות כמו שיהיה לך להכות מספר שלמים ושברים ושטח שברים בשברים או בשלמים גם כן על שלמים ושברים ושטח שברים בשברים והדרך בזה שתוציא ראשונה המספר המכה כשתדע העולה מהשטח ההוא ותחברהו עם השלמים והשברים וסוף דבר תחבר ראשונה כל מה שבמכה עוד תחבר מה שבמוכה ותכה אח״כ הטור האחד על האחר באופן הקודם.

ואם היה לך לגרוע שברים כמה שיהיו משברים שונים מהם תקח המספר המעט שימנוהו המורים לכל השברים והוא המורה הנה וממנו תקח השברים שתרצה לגרוע ותשימם בטור אחד עוד תקח ממנו השברים שתרצה לגרוע מהם ומהם תגרע הטור האחר והנשאר בידך הם החלקים מהמורה אשר לקחנו וזה מבואר . . . דרך אחרת לכפול שלמים ושברים על שלמים ושברים קח המספר המעט שימנוהו המורים לכל השברים והוא המורה הנה ועליו תערוך הטור המכה ותשים העולה בטור אחד ראשון גם על המורה תכה הטור המוכה ותשים העולה בטור אחד שני ותערוך הטור העליון על הטור השפל והעולה בידך הוא המבוקש . . . והמשל אם היה לך להכות י״ב וג׳ חמשיות וד׳ תשיעיות על כ״א וב׳ שלישיות וג׳ רביעיות הנה ידעת שהמספר הראשון שימנה כל[139]) אחד מאלו השברים הוא ק״פ לקחת י״ב דמיוני ק״פ וג׳ חמשיות ק״פ וד׳ תשיעיות ועלה ב׳ אלפים וג׳ מאות וארבעים ושמנה ותשימם בטור אחד לקחת כ״א דמיוני ק״פ וב׳ שלישיותיו וג׳ רביעיותיו ועלה ד׳ אלפים ול״ה[140]) ונשימם בטור האחר הכית הטור האחד על הטור האחר ועלה 0ה׳א׳ד׳ז׳ד׳ט׳ חלקת העולה על מרובע ק״פ ועלה רצ״ב שלמים ונשארו 0ח׳ג׳ג׳א׳[141]) והם חלקים ממרובע ק״פ כאחד וכאשר נבחן תמצא הנשאר ב׳ חמשיות ות״ר חלקים ממרובע ק״פ שהם ב׳ חמשיות וז׳ חלקים מתק״ם וזה מסכים לחשבון הראשון והקש על זה.

והיה זה כן לפי שנכפל כל אחת מצלעות השטח על ק״פ היה יחס השטח אל השטח יחס צלעו אל צלעו שנוי ביחס לפי שהשטחים מתדמים אבל יחס צלעו אל צלעו הוא ק״פ אם כן יחס השטח אל השטח הוא כמו מרובע ק״פ אם כן השטח אשר צלעיו נכפלים על ק״פ ימנהו מרובע ק״פ במספר אחדי השטח הראשון . . .

ואחר שהתבאר אופן כפל[142]) השברים בכל מיניהם הנה נבאר לך מה תעשה ממה שלא הגיע לחלוק והדרך בזה שתחלוק כל מה שתוכל לחלקו והנשאר הם חלקים מהמספר הטור שתחלוק עליו באחד . . . דמיון זה אם רצית לחלק נ״ג[143]) על י״ד יעלה ג׳ וישארו י״א והם י״א חלקים מי״ד באחד והיה זה כן לפי שהחלק מי״ד כשהוכה על י״ד היה י״ד[144]) חלקים מי״ד באחד שהוא אחד שלם אם כן הי״א חלקים כשהוכו על י״ד היו י״א שלמים והוא מה שנשאר לנו והקש

---

[139]) In M. I שימנה לכל אחד, [140]) in M. I ול״ב, [141]) in W. ה׳ג׳ג׳א׳, [142]) in M. II לכל, [143]) in M. II נ״ד, [144]) in W. u. M, II י״א.

ואם תהלקנו על ארבעה יהיה העולה המשיות ויעלה[128]) בידך ב׳ המשיות ורביעית המשית ואם תהלקנו על ה׳ יהיה העולה רביעיות ויעלה בידך רביעית[129]) וד׳ המשיות רביעית וככה העולה דמיון אחר אם היה לך להכות ג׳ המשיות על ששית והעולה על ז׳ שמיניות והעולה על ד׳ תשיעיות תמיר המספרים שהם ג׳ ד׳ ז׳ במקומות היותר נאותים ולזה תשים הג׳ אצל הששיות וארבעה אצל השמיניות והז׳ אצל התשיעיות וישאר המשית בזולת מספר ותכה ג׳ ששיות שהם חצי על ארבעה שמיניות שהם הצי ויעלה בידך רביעית תכהו[130]) על חמשית ויהיה רביעית המשית תכה רביעית המשית על ז׳ תשיעיות ויעלה בידך ז׳ רביעיות המשית תשיעית והקש על זה.

ד ר ך הכאת שברים מה בשברים שונים אם היה לך להכות שבר מונה או מספר[131]) שברים מונחים על שברים מונחים ערוך השבר המונה או השברים המונחים על המין הראשון מהשברים השונים והלק העולה על המורה על השבר המוכה כדי שיהיה העולה בידך הלקים מהמכה וכן תעשה עד שיוכה הראשון המכה על כל הנמשכים ובזה יהיו כל החלקים אשר בידך בעולה משברי המכה דמיון רצינו להכות ב׳ שלישיות על ו׳ שביעיות ועל ד׳ שמיניות ועל ח׳ תשיעיות נכה ב׳ על ו׳ יהיו י״ב נחלקם על שבעה שהוא מורה לשבר המוכה ועלה אחד וה׳ שביעיות והוא שלישית וה׳ שביעיות שלישית ערכנו ב׳ על ז׳ ועלה י״ד נחלקם על שמנה[132]) שהוא שבר המוכה ועלה א׳ וו׳ שמיניות והוא שלישית וג׳ רביעיות שלישית ערכנו ב׳ על ה׳ ועלה ט״ז נחלקם על תשעה ועלה אחד וז׳ תשיעיות והוא שלישית וז׳ תשיעיות שלישית הברנו כל השברים אשר בעולה שהם ג שלישיות וה׳ שביעיות שלישית וג׳ רביעיות שלישית וה׳[133]) תשיעיות שלישית׳ ועלה אחד שלם וב׳ שלישיות וס״א הלקים מתשנ״ו באחר והקש על זה ואם היה לך להכות שלמים ושברים כמה שיהיו על שלמים ושברים כמה שיהיו הנה כבר ידעת אופן הכאת שלמים בשלמים ואופן הכאת שלמים בשברים ואופן הכאת שברים בשברים ולזה תכה כל השלמים שבטור המכה על[134]) כל השלמים והשברים אשר בטור המוכה עוד תכה כל השברים שבטור המכה על כל השלמים והשברים אשר בטור המוכה דמיון זה אם היה לך להכות י״ב וג׳ המשיות וד׳ תשיעיות על כ״א וב׳ שלישיות וג׳ רביעיות הכה י״ב על כ״א ועלה רנ״ב הכה י״ב על ב׳[135]) שלישיות ועלה ח׳ שלמים · הכה י״ב על ג׳ רביעיות ועלה ט׳ שלמים הכית[136]) ג׳ המשיות על כ״א שלמים ועלה י״ב שלמים וג׳ המשיות הכית ג׳ המישיות על ב׳ שלישיות ועלה ב׳ המשיות הכית ג׳ המשיות על ג׳ רביעיות ועלה ב׳ חמשיות הכית ג׳ חמשיות[137]) על ג׳ רביעיות ועלה ב׳ חמשיות ורביעית חמשית הכית ד׳ תשיעיות על כ״א ועלה ט׳ שלמים ושלישית הכית[138]) ד׳ תשיעיות על ב׳ שלישיות ועלה ב׳ תשיעיות וב׳ שלישיות תשיעית הכית ד׳ תשיעיות על ג׳

---

[128]) In M. I fehlt bis בידך רביעית, [129]) in W. noch א׳ ב׳ ד׳, [130]) fehlt in M. II, [131]) in M. II u. W. מספרים, [132]) in M. II על מורה שבעה שהוא שבר, [133]) in M. I וג׳, [134]) in M. II fehlt bis עוד, [135]) in M. II י״ב, [136]) in M. II fehlt bis zum nächsten הכית, [137]) in W. רביעיות, [138]) in M. II fehlt bis הכית.

יהיו חלקים מה ממורכב מהמורים לשברים הנשארים ואתה תבחר היותר נכון לחלק עליו דמיון זה נרצה להכות ז' שביעיות על ה' ששיות והעולה על ג' רביעיות והעולה על ז' שמיניות והעולה על ג' שלישיות והעולה על ב' שביעיות והעולה על שלישיות שלישית הכינו ו' על ה' ועלה ל' הכינו ל' על ג' ועלה צ' הכינו צ' על ז' ועלה תר"ל הכינו תר"ל על ב' ועלה אלף ור"ס הכינו אלף ור"ס על ב' ועלה אלפים ותק"כ ערכנו אלפים ותק"כ על אחד ועלה אלפים ותק"כ והנה השברים אשר בידך הם שביעית ששית רביעית שמינית שלישית שביעית שלישית שלישית ואם תחלק אלפים ותק"כ על המורה לאחד מאלו השברים יהיה העולה בידך הלקים מהמספר המורכב ממורי השברים הנשארים והנה מפני שהמספר רב ראוי שתחלקהו על המספר המורכב מקצת המורים אשר יראה בעיניך שהוא יותר נאות לחלק עליו חלקנו אותו על המורכב משבעה וו' וג' וד' שהוא תק"ד ועלה ה' והם הלקים ממורכב מורי השברים הנשארים ואולם הנשארים הם שמינית שביעית שלישית שלישית[124]) א"כ העולה מזאת ההכאה הם ה' שמיניות שביעית שלישית שלישית והקש על זה והיה זה כן לפי שכבר יתבאר ממה שקדם במעט עיון שהעולה שהוא אלפים תק"כ הם הלקים ממורכב מכל מורי השברים באחד והבן ותמצא דרך אחרת קלה לזה דע כי המספר המורכב ממספרים מונחים ומשברים[125]) מונחים יחסו אל אחד היחס המחובר מיחסי מספרי השברים ההם כשיושמו קודמים אל מספרי מוריהם כשיושמו נמשכים משל זה שיחס הכאת שלשה שביעיות בד' חמשיות והעולה בב' חמשיות רביעית להכאת אחד באחד והעולה באחד שהוא אחד לעולם כמה שהגיע הכפל הוא מחובר משלשה יחסים מיחס שלשה שביעיות אל שבעה שביעיות שהוא אחד ומיחס ארבעה[126]) חמשיות אל ה'[127]) חמשיות שהוא אחד ג"כ ומיחס ב' הלקים מי"ב אל י"ב הלקים מי"ב שהוא אחד וכבר ידעת שכאשר הומר סדור הקודמים או הנמשכים או שניהם יחד נשאר היחס המחובר בעינו ובהיות הענין כן אם היה לך להכות מספר שברים על מספר מה משברים וכן מה שהגיע ההרכבה תוכל להמיר מספרי אלה השברים במספר אחר מהשברים האחרים אם היה יותר נאות אל ההכאה משל זה שאם היה לך להכות ג' שביעיות על ז' שמיניות תוכל להמיר השבעה אל השביעיות ויהיה לך להכות ג' שמיניות על ז' שביעיות שהוא אחד והעולה הוא ג' שמיניות וככה המבוקש . . . . דמיון אחר אם רצית להכות ד' שביעיות על ה' שמיניות תוכל להמיר הד' אל השמיניות ויהיה לך להכות ד' שמיניות שהוא חצי אחד על ה' שביעיות ויעלה ב' שביעיות וחצי וככה המבוקש דמיון אחר אם היה לך להכות ג' רביעיות על ד' חמשיות והעולה על ו' שביעיות והעולה על ז' שמיניות תמיר המספרים שהם ג' ד' ו' ז' במקומות היותר נאותים ולזה תשים הז' אצל השביעיות והד' אצל הרביעיות והו' אצל השמיניות והג' אצל החמשיות ולזה תכה ז' שביעיות שהוא אחד על ד' רביעיות שהוא אחד ויעלה אחד והעולה שהוא אחד תכה על ו' שמיניות ויהיו בידך ג' רביעיות והעולה תכה על ג' חמשיות ויעלה בידך ט' רביעיות חמשית

[124]) In W. fehlt einmal שלישית, [125]) in M. II fehlt ומשברים מונחים, in W. משברים, [126]) in W. fehlt ארבעה, [127]) in W. fehlt ה'.

לשמינית הוא שמנה והמורכב משני המורים הוא קס״ח ערכנו ה׳ על ז׳ ועלה ל״ה והם ל״ה חלקים מקס״ח באחד שלם והקש על זה.

דרך חבור השברים השונים. קח המספר המעט שימנוהו כל המורים לשברים ההם והוא המורה הנה[120]) וממנו תקח השברים ההם בכללם והעולה תחלקהו על המורה והוא המבוקש דמיון זה אם רצינו להבר ב׳ שלישיות עם ד׳ המשיות ועם ה׳ ששיות ועם ג׳ רביעיות ששית כבר ידענו שהמספר המעט שימנוהו שלשה וה׳ וו׳ וכ״ד הוא ק״כ וכבר התבאר דרך לקיחתו מאקלידס והנה ב׳ שלישיותיו הם פ׳ וזה יתבאר כשנחלק ק״כ על שלשה ונקח ב׳ דמיוני העולה וד׳ המשיותיו הם צ״ו וה׳ ששיותיו הם ק׳ וג׳ רביעיות ששיותיו הם ט״ו חברנו כל אלו המספרים ועלה רצ״א חלקנו רצ״א על ק״כ ועלה ד׳ שלמים נ״א חלקים מק״כ באחד והיה זה כן לפי שיחס ב׳ שלישיות אחד אל אחד כיחס ב׳ שלישיות ק״כ אל ק״כ וכזה יתבאר בנשאר וכאשר קבצנו הנה יחס כל אלו השברים אל אחד כיחס רצ״א אל ק״כ והקש על זה.

דרך לדעת העולה מהכאת השברים בשברים או בשברי השברים. כבר ידעת שהכאת השברים בשברים הם החלקים מהמורה המורכב ממוריהם וכבר התבאר שהמספר המורכב ממספרים מה ימנהו אחד מהמספרים בכמו אחדי המספר המורכב מהמספרים הנשארים וכן ימנהו המספר המורכב ממספרים מה ממנו בכמו אחדי המספר המורכב מהמספרים הנשארים ובהיות הענין כן אם תחלק המספר אשר בידך על אחד מהמספרים יהיה העולה חלקים מהמספר המורכב מהנשארים משל זה אם תכה ו׳ שביעיות על ז׳ שמיניות עלה מ״ב ואם תחלק מ״ב על שבעה יהיה העולה בידך שמיניות לפי שהמספר המורכב מז׳ וח׳ ימנהו ז׳ כשיעור אחדי ח׳ ולזה יהיה העולה ו׳ שמיניות ואם תחלק על שמנה יעלה בידך שביעיות ולזה יהיה העולה ה׳ שביעיות וב׳ שמיניות שביעית דמיון אחר אם רצית להכות כ״ה חלקים מכ״ט באחד על ו׳ שביעיות שלישית תערוך כ״ה על ו׳ ועלה קס״ה הנה אם תחלק קס״ה על כ״ט יעלו בידך שביעיות שלישית[121]) שהם השברים הנשארים ויהיה העולה ה׳ שביעיות שלישית וכ״ג חלקים מכ״ט שביעיות שלישית ואם חלקת על המספר המורכב מז׳ וג׳ יעלו בידך חלקים מכ״ט ויהיה העולה ה׳ [122]) חלקים מכ״ט באחד ואם תחלוק על ז׳ יעלו בידך שלישיות חלק מכ״ט חלקים באחד ולזה יהיה העולה כ״ד שלישיות חלק מכ״ט באחד ולזה יהיה העולה ה׳ [123]) חלקים מכ״ט ואם תחלוק על ג׳ יעלו בידך שביעיות חלק מכ״ט חלקים באחד ולזה יהיה העולה נ״ו שביעיות חלק מכ״ט חלק באחד שהם ה׳ חלקים מכ״ט באחד והקש על זה.

דרך להכות שברים על שברים והעולה על שברים וכן מה שיהיה ערוך מספרי השברים הראשונים על מספרי השברים השניים והעולה בידך ערכהו על מספר השברים השלישיים וכן עד גלות כל השברים אחר כך תחלוק העולה על המורה לאחד מהשברים או על המורכב ממספרי מורים מה מהם והעולה בידך

---

120) In M. I fehlt הנה, 121) in M. II יעלו בידך שביעיות שלישית וג׳ חלקים מכ״ט
122) in M. II ז׳, 123) in W. ס׳.

ואחר שהתבאר אופן הכאת שברים בשלמים בכל אופניהם הנה נבאר אופן הכאת שברים בשברים ונבאר שיחס שטח שבר בשבר אל אחד כיחס אחד אל השטח ההוה מהמורה האחד במורה האחר והמשל שיחס שטח שלישית בחמשית אל אחד כיחס אחד אל שטח שלשה בחמשה שהוא ט"ו וזה שיחס שטח שלישית בחמשית אל שטח אחד באחד שהוא אחד מחובר משני יחסים מיחס שלישית אל אחד ומיחס חמשית אל אחד[115]) וכן יחס שטח אחד באחד שהוא אחד אל שטח שלשה בחמשה מחובר משני יחסים מיחס שלישית אל אחד ומיחס חמשית אל אחד וכבר היה יחס שטח שלישית בחמשית אל שטח אחד באחד מחובר משני אלו היחסים בעצמם א"כ יחס שטח שלישית בחמשית אל אחד כיחס אחד אל שטח שלשה בחמשה אבל[116]) יחס אחד אל שטח שלשה בחמשה הוא חלק מט"ו באחד[117]) א"כ[118]) שטח שלישית בחמשית הוא חלק מט"ו באחד והקש על זה.

וכזה התבאר ששטח שלישית בשלישית הוא תשיעית אחד וכזה יתבאר בכמו זה הביאור ששטח מספר מונח משברים מה או שבר מה במספר מונח משברים מה או בשבר מה הוא חלקים משטח המורה האחד באחר כמספר שטח המספר המכה במספר המוכה והמשל שנרצה להכות ד' שביעיות על ה' תשיעיות ונאמר שהעולה הוא חלקים מס"ג באחד שהוא שטח המורה האחד באחר כמספר שטח ד' בה' שהוא כ' וזה שיחס שטח שביעית בתשיעית אל שטח ד' שביעיות בה' תשיעיות מחובר משני יחסים מיחס אחד אל ד' ומיחס אחד אל ה' אבל זה היחס המחובר הוא יחס אחד אל כ' אם כן יחס שטח שביעית בתשיעית אל שטח ד' שביעיות בה' תשיעיות הוא יחס אחד אל כ' אבל שטח שביעית בתשיעית הוא חלק מס"ג באחד א"כ ד'[119]) שביעיות בה' תשיעיות הוא כ' חלקים מס"ג חלקים באחד ודקיש על זה ואין ספק שבזה הביאור בעצמו יתבאר אם לא היה מספר כי אם באחד מהם.

וכאשר התבאר זה כלו נודיעך דרך לקיחת המורה בשבר השבר ונאמר שהמורה על שבר השבר הוא המספר המורכב מהמספרים המורים על השברים ההם והמשל ששלישית חמשית שלישית הוא אחד ממורכב ממספרי שלשה חמשה שלשה באחד ולזה יהיה חלק ממ"ה באחד וזה שיחס שטח חמשית בשלישית אל שטח אחד באחד כיחס שטח אחד באחד אל שטח חמשה בשלשה אם כן חמשית שלישית הוא חלק מט"ו באחד וגם כן הנה יחס שטח שלישית בחלק מט"ו באחד אל שטח אחד באחד כיחס שטח אחד באחד אל שטח שלשה בט"ו א"כ שלישית חמשית שלישית הוא חלק ממ"ה באחד והקש על זה ואחר שידענו המורה תנהיג ההכאה באופן הקודם בין בשברים בין בשלמים דמיון זה אם רצינו להכות ה' שביעיות שלישיות על ד' שמיניות הנה המורה לשביעית שלישית הוא כ"א והמורה

---

115) In M. II ist der Text vollständig corrumpiert, er lautet dort: ומיחס אחד אל חמשה שהוא כמו יחס חמשית אל אחד אם כן יחס שטח אחד באחד שהוא אחד אבל שטח שלשה בחמשה מחובר . . . . . 116) in W. fehlt אבל, 117) in M. I fehlt באחד, 118) in W. fehlt von א"כ bis והקש, 119) in W. ו'.

העולה בטור האמצעי הוא ז'ה'ו'ד'0א' [111]) והנשאר בטור העליון הוא ב'א'ב'ו' וכתבנום בטור ששי והקש על זה.

וראוי שתדע שאם היו המספרים אשר בטור העליון עד המעלה אשר מרחקה [112]) מהמעלה האחרונה ממנו כמרחק המעלה האחרונה שבטור התחתון מן הראשונה כשהורדנום כלם אל המעלה ההיא כמספר הטור התחתון כשהורדנוהו אל המעלה הראשונה או יותר הנה ראוי שתשים אחד בטור העולה במעלה הראויה לפי מה שקדם ואע"פ שלא תשיג בטור העליון על הצד שהיישרנו בשלמות... משל שיהיה לך לחלק טור ג'ז'ד'ט' על טור ג'ד'ט' ויהיה השמור לפי מה שהיישרנו אליו ט' אחדים וה' עשיריות ובטור העליון ט' אחדים וד' עשיריות ולזה יחשב לפי מה שקדם שיצטרך להוריד ט' אל שלפניו ואמנם כשהורדנו ג'ד'ט' שבטור העליון אל המעלה השלישית לאחור למעלת ט' היו תשע מאות ומ"ג וכזה מספר הטור התחתון כשהורד אל הראשונה ולזה תשים בטור העולה אחד במעלה השנית ותערכהו על הטור התחתון ותגרע העולה מהטור העליון ולא ישאר לך בטור העליון כי אם ז' מהראשונה והקש על זה ואתה צריך לחוש לזה כשיהיה המספר האחרון שבטור התחתון שוה למספר האחרון שבטור העליון והמספר השני לו לאחור שוה למספר השני אל האחור לאחר. ולפי שראוי שנבאר מה יעשה מהנשאר בטור העליון ואין דרך לזה הביאור אלא אם כן התבאר קודם דרך כפל השברים בשלמים הנה נבאר ראשונה דרך כפל השברים ושברי שברים בכל אופניהם.

דע שיחס כל הלק אל אחד כיחס אחד אל המספר המורה אל החלק ההוא והמשל שיהיה יחס שלישית אל אחד כיחס אחד אל שלשה שהוא מורה על שלישית לפי שהאחד הוא שלישית שלשה וכאשר התישב זה הנה יתבאר שיחס שטח שבר מונח באחד אל שטח אחד באחד הוא כיחס אחד אל המורה על השבר המונח והמשל שיחס שטח שלישית באחד אל שטח אחד באחד הוא כיחס אחד אל שלשה וזה שיחס שטח שלישית באחד אל שטח אחד באחד הוא כיחס שלישית אל אחד אבל יחס שלישית אל אחד הוא כיחס אחד אל שלשה ויחס אחד אל שלשה הוא שלישית א"כ שטח שלישית באחד הוא שלישית אחד לפי ששטח אחד באחד הוא אחד וגם כן יתבאר בכמו זה הביאור ששטח מספר מונח משלמים או שלם אחד במספר מונח משברים או בשבר אחד הם החלקים מהמורה באחד כמספר שטח מספר המכה במספר המוכה והמשל שנרצה להכות ה' שביעיות על מ' שלמים ונאמר שהעולה הוא חלקים משבע באחד כמספר שטח ה' במ' שהוא ר' והוא [113]) שיחס שטח ה' שביעיות במ' שלמים אל שטח שביעית באחד מחובר משני יחסים מיחס המשה אל אחד ומיחס מ' אל אחד והנה היחס המחובר משני אלו היחסים הוא יחס מאתים אל אחד אבל שטח שביעית באחד הוא שביעית אם כן ששטח ה' שביעיות במ' שלמים הוא ר' הלקים משבעה באחד שהם כ"ה [114]) שלמים וד' שביעיות ואין ספק שבזה הביאור בעצמו התבאר הענין אם לא היה מספר כי אם באחד מהם ר"ל בשברים או בשלמים והקש על זה.

---

111) ז'ה'ו'ד'0א' in M. II, in M. I nur ז'ד'ו'ד', 112) in M. II noch הטור, 113) in W. am Rand מ"ג, 114) in M. II כ"א.

ונכתוב זו על הטור העליון ונמחק הטור הקודם והנה במעלה האחרונה שבטור העליון עם מה שלפניו ד׳ שלמים וג׳ עשירות והוא פחות מהשמור ולזה תוריד ד׳ אל שלפניו יהיו מ׳ בה וג׳ שהיו בה והנה מ״ג וט׳ עשירות במעלה שלפניו חלקנו מ״ג וט׳ עשיריות על ט׳ וה׳ עשיריות שהיא השמור ועלה ד׳ בשלמות ונכתוב ד׳ בטור האמצעי במעלה הרביעית לאחור למעלת המ״ג ולזה יהיו הד׳[103]) מהרביעית הכינו ד׳ על הטור התחתון ועלה ח׳ ברביעית ד׳ בחמשית ז׳ בששית ז׳ בשביעית ג׳ בשמינית גרענו העולה מהטור העליון השני ונשאר א׳ב׳ג׳ו׳0ב׳ו׳[104]) והנה מה שבמעלה האחרונה עם מה שבמעלה שלפניה הוא פחות מהשמור ולזה נוריד הו׳ שבמעלה האחרונה אל שלפניה יהיו ששים בה וב׳ שהיו בה והנה ס״ב ואין במעלה שלפניה דבר נחלק ס״ב על השמור ועלה ו׳ ונשימם בשלישית לפי שהיו ברביעית לאחור ממעלת ס״ב[105]) שחלקנו ערכנו ו׳ מהשלישית על הטור התחתון ועלה ב׳ מהשלישית ב׳ מהרביעית ו׳ בחמישית ו׳ בששית ה׳ בשביעית גרענו העולה מהטור העליון השלישי ונשאר הטור העליון הרביעי א׳ב׳א׳ד׳ד׳ה׳[106]) ונוריד ה׳ אל המעלה שלפניה וד׳ אשר בה והנה נ״ד[107]) וד׳ שבמעלה שלפניה יהיו ד׳ עשירות חלקנו נ״ד וד׳ עשיריות על השמור ועלה ה׳ ונשימם בטור האמצעי בשנית שהיא הרביעית לאחור מהמעלה שחלקנו ערכנו ה׳ מהשנית על הטור התחתון ועלה ה׳ח׳א׳ז׳ד׳[108]) גרענו העולה מהטור העליון הרביעי ונשאר א׳ז׳ב׳ב׳ז׳ והוא הטור העליון החמישי ונוריד ז׳ אל המעלה שלפניה וב׳ אשר בה והנה ע״ב חלקנו על השמור ועלה ז׳ ונשימם בטור האמצעי בראשונה שהיא הרביעית לאחור מהמעלה אשר חלקנו ערכנו ז׳[109]) מהראשונה על הטור התחתון[110]) ועלה ט׳ה׳0ו׳ו׳ גרענום מהטור העליון החמישי ונשאר ב׳א׳ב׳ו׳ והוא פחות מהטור התחתון והוא הנשאר שלא הגיע להלוק והנה

ב א ב ו

א ז ב ב ז

א ב א ד ד ה

א ב ג ו 0 ב ו

א ב ג ד ה ט ג ד

הטור העליון א ב ג ד ה ו ז ח ט

טור העולה ז ה ו ד 0 א

הטור שהלקנו עליו ז ג ד ט

ז ג ד ט

ח ד ז ז ג

ב ב ו ו ה

ה ח א ז ד

ט ה 0 ו ו

103) In M. II נ״ג, 104) in W. א׳ד׳ו׳o, in M. II א׳ב׳ג׳ו׳ ו׳ב׳. 0 ist überall in den Hdschr. durch freien Platz bezeichnet, 105) in W. und M. II ל״ב, 106) in M. I א׳ב׳ג׳ד׳ד׳ה׳, 107) in M. I nur ד׳, 108) in M. II ה׳ח׳א׳ד׳, 109) in M. I ה׳, 110) in M. I fehlt על הטור התחתון.

השער החמישי בחלק מספר על מספר. כבר ידעת שכל שטח ימנהו אחד מצלעיו כמספר אחדי הצלע השנית על כן אם ידעת מספר השטח וידעת אחת מצלעותיו תוכל להוציא הצלע השנית והנה אופן המעשה בזה שתכתוב מספר השטח בטור אחד ותחתיו תכתוב בטור אחר הצלע הידוע' והחלוק הטור העליון על הטור השפל והעולה בידך הוא הצלע השנית ואולם איך תחלוק הטור העליון על הטור השפל הנה כפי מה שאומ' תסתכל תחלה במספר האחרון שבטור התחתון ובמספר שבמעלה הקורמת לו וכל המספרים שלפני המעלה הקודמת לו בטור התהתון תחשוב כאלו הם אחד לבד במעלה הקודמת לו ומה שיעלה בידך מן האחדים במעלה האחרונה שבטור התחתון יהיו לאחדים בידך ומה שיעלה בידך מן האחדים במעלה שלפני האחרונה יהיו לעשיריות אחד שלם ומה שיהיה בידך מן האחדים והעשיריות שמרם אח"כ התבונן במספר התחתון שבטור העליון והיו לאחדים בידך והאחדים שבמעלה שלפניו יהיו עשיריות ולא תחוש לשאר המספרים והעולה בידך מן האחדים והעשיריות אם הם יותר מהשמור או כדי השמור תחשוב כמה פעמים יהיה בו השמור בשלמות והעולה בידך תשימהו בטור אמצעי בין שני הטורים במעלה אשר מרחקה מהמעלה האחרונה שבטור העליון לפניו כמרחק המעלה האחרונה שבטור התחתון ממדרגת האחדים אחר כך ערוך המספר ההוא אשר בטור העולה על הטור התחתון והעולה בידך תגרעהו מהטור העליון ותכתוב הנשאר בידך על הטור העליון ותמחוק הטור העליון הקודם ואם לא היה המספר האחרון אשר בטור העליון עם העשיריות אשר שם כמו השמור תוריד המעלה האחרונה אל שלפניה וממנה תחשוב האחדים והעשיריות משלפניה והעולה בידך תראה כמה פעמים ימנהו השמור בשלמות והעולה תכתוב במעלה אשר מרחקה לאחור מהמעלה האחרונה אחר ההורדה שבטור העליון כמרחק המעלה האחרונה שבטור התחתון כהמדרגה הראשונה ותנהג הענין על המנהג הקודם. אח"כ תשוב לעשות מהטור העליון הנשאר בידך כמו מה שעשית מהטור העליון הקודם וכן תעשה עד שלא ישאר לך בטור העליון דבר או שישאר לך פחות מהטור התחתון אם היה. שלא ימנה הטור העליון הטור התחתון ועוד נודיעך במה[100]) שיבא מה תעשה מהנשאר ההוא ופעמים יקרה שנצטרך לכתוב בטור העולה שתי פעמים במעלה אחת ומעט מה שיקרה זה. דמיון זה רצינו לחלק טור א'ב'ג'ד'ה'ו'ז'ח'ט' על טור ז'ג'ד'ט' והנה המספר האחרון שבטור התחתון והוא ז'ג'ד'ט' הוא ט' והם שלמים ובמעלה שלפניו מספר ד' וכל מה שלפניו הוא אחד בה על צד האומד והקרוב[101]) ויהיו ה' והם עשיריות ולזה יהיה השמור ט' שלמים וה' עשיריות והנה ט'[102]) שלמים וה' עשיריות ימנם ט' שלמים וה' עשיריות פעם אחת ולזה נכתוב א' בטור האמצעי בין שני אלו הטורים במעלה הרביעית לאחרונה שבטור העליון לפניה לפי שמספר האחרון שבטור התחתון הוא מרביעית ולפי זה יהיה הא' שבטור האמצעי מהמעלה הששית הכינו א' על הטור התחתון ועלה ז' מהששית ג' מהשביעית ד' מהשמינית ט' מהתשיעית גרענו העולה מהטור העליון ונשאר בטור העליון א'ב'ג'ד'ה'ט'ג'ד'

100) In M. II und W. fehlt מה, 101) fehlt in W., 102) ט' fehlt in M. II, ebenso ה'.

א׳ב׳ג׳ד׳ה׳ הוא ק״ך וככה המבוקש והיה זה כן לפי שמחברות ב׳ הם ב׳ וזה שוה למורכב א׳ב׳ ומחברות שלשה הם כמו שטח ג׳ בב׳ שהוא מורכב א׳ב׳ג׳ וכזה התבאר זה עד אין תכלית.

אם רצית לדעת כמה תהיינה מחברות מספר מונח שני[95]) ממספר מונח ראשון מנושאים מתחלפים המתחלפות אם בסדר אם בנושאיהן כבר ידעת שמחברות השנים הם כמו שטח המספר המונח הראשון במספר הנמשך לו לפניו ומחברות שלשה ממנו יחסם אל מחברות השנים כמו הנשאר מן המספר המונח הראשון כשנגרע ממנו שנים ומחברות הארבעה ממנו יחסם אל מחברות השלשה כמו הנשאר מן המספר המונח הראשון כשנגרע ממנו שלשה וכזה ימשך הענין לאין תכלית ומפני זה יהיה הדרך בזה שתקח המספר המורכב מהמספר המונח השני ממספרים נמשכים שיהיה האחרון מהם שוה אל המספר המונח הראשון והעולה הוא המבוקש[96]) דמיון זה אם רצית לדעת מחברות החמשה מח׳ נושאים המתחלפות אם בסדר אם בנושאיהם הנה מפני שהמספר המונח השני הוא חמשה תקח מורכב חמשה מספרים נמשכים שיהיה האחרון מהם שמנה והם ד׳ה׳ו׳ז׳ח׳ והמספר המורכב מהם הוא ו׳ אלפים תש״כ וככה מחברות החמשה המתחלפות אם בסדר אם בנושאיהם משמנה נושאים מתחלפים והיה זה כן לפי שמחברות השנים[97]) ממנו הוא שטח ז׳ בח׳ ומחברות השלשה ממנו הוא שטח ו׳ בשטח ז׳[98]) בח׳ לפי מה שהוא במה שקדם ומחברות הארבעה ממנו הוא שטח ה׳ במורכב ממספרי ו׳ז׳ח׳ ומחברות החמשה ממנו הוא שטח ד׳ במורכב ממספרי ה׳ו׳ז׳ח׳ וכזה יתבאר לאין קץ וזה כלו מבואר ממה שקדם. אם רצית לדעת כמה תהיינה מחברות מספר מונח שני המתחלפות בנושאיהן ממספר מונח ראשון מנושאים מתחלפים קח מחברות המספר המונח השני המתחלפות אם בסדר אם בנושאיהם מהמספר המונח הראשון מנושאים מתחלפים ושמור העולה קח מחברות המספר המונח השני המתחלפות בסדר לבד וכמו שיעור אחדי המספר שימנה השמור העולה וככה המבוקש דמיון זה אם רצית לדעת מחברות החמשה המתחלפות בנושאיהן משמנה נושאים מתחלפים ראה כמה פעמים ימנה מורכב ד׳ה׳ו׳ז׳ח׳ מורכב א׳ב׳ג׳ד׳ה׳ והנה מורכב ד׳ה׳ו׳ז׳ח׳ הוא ו׳ אלפים תש״כ ומורכב א׳ב׳ג׳ד׳ה׳ הוא ק״ך וו׳ אלפים תש״כ ימנה ק״ך נ״ו פעמים והנה נ״ו[99]) הוא המבוקש וכבר יבוא לך דרך החשבון בזאת החלוקה במה שאחר זה ולהקל מעליך כבר ידעת שמחברות החמשה המתחלפות בנושאיהן משמנה נושאים מתחלפים הם כמספר מחברות השלשה המתחלפות בנושאיהן מאלו הנושאים ולזה תעיין כמה פעמים ימנה מורכב ו׳ז׳ח׳ שהוא של״ו מורכב א׳ב׳ג׳ שהוא ו׳ והנה ימנהו נ״ו פעמים וככה מחברות השלשה המתחלפות בנושאיהן משמנה נושאים גם ככה מחברות החמשה שהוא שאריתם וזה כבר התבאר ממה שקדם.

---

95) In W. am Rand: ר״ל מחברות שנים שנים או שלשה שלשה מן מנין נושאים מתחלפים כאלו תומר עמנו עשרה נושאים והוא שקראו מספר ראשון ורצינו הבור שלשה שלשה מהם והוא שקראו מספר שני, 96) in W. am Rand eine durch Randabschneidung unleserliche Bemerkung, 97) in M. II הראשונים, 98) in M. II שטח ד׳ במרובע ז׳, 99) in M. II י״ד נ״ו.

החמשי לאחד הוא פ״א והשביעי הוא שלישי לחמשי ערכנו פ״א על [91]) ט שהוא השלישי והנה תשכ״ט והוא השביעי ערוך השביעי על התשיעי ויעלה בידך [92]) המספר החמשה עשר [93]) והוא ד׳ אלפי אלפים וז׳ מאות אלף ושמנים ושמנה אלף ותתקס״ט והוא החמשה עשר והקש על זה והיה זה כן לפי שיחס הראשון אל השני כיחס השני אל השלישי ולזה יהיה שטח הראשון בשלישי כמו שטח השני בעצמו אבל שטח הראשון בשלישי הוא השלישי לפי שהראשון הוא אחד א״כ שטח השני בעצמו הוא שטח השלישי ובזה יתבאר ששטח הראשון בחמשי כמו שטח השלישי בעצמו וכן יתבאר מה שימשוך לזה וגם כן הנה יחס הראשון אל השלישי כמו יחס החמשי אל השביעי א״כ שטח השביעי בתשיעי הוא כמו שטח הראשון בשביעי שהוא כמו השביעי וגם כן הנה יחס הראשון אל השביעי כיחס התשיעי אל החמשה עשר אם כן שטח השביעי בתשיעי הוא כמו שטח הראשון בחמשה עשר שהוא כמו החמשה עשר והקש על זה.

ואם רצית לדעת מה יעלה המספר האחרון ממספר מונה ממספרים מתיחסים על יחס מונה בלתי מתחילין מן האחד דע תחלה מה יעלה המספר האחרון ממספר המונה ממספרים מתיחסים על היחס המונה מתחילין מן האחד וערכהו על המספר הראשון וככה המבוקש. דמיון זה שיהיו המספרים המתיחסים חמשה והיחס שלשה והראשון חמישה ורצית לדעת כמה האחרון הנה כבר ידענו שהחמשי מזה היחס אם היו מתחילין מן האחד הוא פ״א ערכת פ״א על המספר הראשון שהוא חמשה ועלה ת״ה וככה המבוקש והיה זה כן כי ביחס השווי יחס הראשון שהוא אחד אל החמשי לו כיחס החמשי אל החמשי לו מזה היחס וכאשר המירונו הנה יחס הראשון אל הראשון כיחס החמשי אל החמשי ואולם יחס הראשון אל הראשון הוא חמשה הנה יחס החמשי אל החמשי הוא חמשה והקש על זה.

אם רצית לחבר מספר מה ממספרים מתיחסים על יחס מונה גרע הראשון מהשני וראה יחס הנשאר מהשני אל הראשון וככה יחס הנשאר מן האחרון כשנגרע ממנו הראשון של כל המספרים שלפניו [94]) וזה כבר התבאר בסוף המאמר התשיעי מאקלידס דמיון זה אם רצית לחבר ששה מספרים מתיחסים על יחס ג׳ והראשון ד׳ כבר ידעת שהשני הוא י״ב והאחרון הוא תתקע״ב גרענו מהשני הראשון שהוא ד׳ ונשארו שמנה והנה יחס ד׳ אל ח׳ הוא חצי גרענו מהאחרון ד׳ ונשארו תתקס״ח לקחנו חצים והנה תפ״ד חברנוהו עם תתקע״ב והנה אלף תנ״ו והוא המבוקש.

השער הרביעי בחבור מספר מחברות מנושאים מונחים תתחלפנה המחברות בנושאיהם או בסדרם או בשני הענינים יחד. אם רצית לדעת מספר מחברות מספר מונה מנושאים מתחלפים המתחלפות בסדר לבד קח המספר המורכב מהמספרים הנמשכים מן האחד עד המספר ההוא וככה המבוקש דמיון זה אם רצית לדעת בכמה דרכים יתחברו ה׳ נושאים ותהיינה המחברות מתחלפות בסדר הנה המספרים הנמשכים מן האחד עד ה׳ הם א׳ב׳ג׳ד׳ה׳ והמספר המורכב ממספרי

[91]) על fehlt in M. II, [92]) in M. II בדרך, [93]) in allen Hdschr. החמש עשרה,
[94]) so in allen Handschriften, offenbar fehlt hier etwa: חברהו עם האחרון ועלה המבוקש.

ממספרים [82]) נמשכים בזולת דרך המספר בשיעור ההמשך המונח והחבר [83]) עם העולה השמור הראשון המתוקן והנה המבוקש דמיון זה במשלנו הקודם רצוני שיהיה המספר הראשון מוסיף שנים על שיעור ההמשך הנה ידענו כי מרובעי שבעה מספרים נמשכים בהמשך שלשה שלשה הם אלף ור"ס [84]) ערכנו אלף ור"ס על שלשה דמיוני המספר המונח השני [85]) שהוא ו' ועלה ז' אלפים ותק"ס ונשמור העולה וג"כ הנה נקבץ המספרים [86]) הנמשכים בהמשך שלשה עד שבעה הוא פ"ד ערכנום על שלשת דמיוני מרובע המספר המונח השני שהוא י"ב ועלה אלף וח' ונשמרם גם כן וג"כ הנה מעוקב המספר המונח השני הוא ה' ערכנוהו על המספר המונח הראשון שהוא ז' ועלה נ"ו חברנום עם שני השמורים ועלה ח' אלפים ותרכ"ד והוא השמור הראשון המתוקן וגם כן הנה מעוקבי שבעה מספרים נמשכים בהמשך שלשה הוא כ"א אלפים וקס"ה חברנום עם השמור המתוקן הראשון ועלה כ"ט אלפים ותשצ"ב והוא המבוקש והיה זה כן שאם נגרע מכל אחד מאלו המספרים שנים היו נמשכים בהמשך שלשה ואולם מעוקב כל מספר מהם פחות ממעוקב המספר כשהוסף עליו שנים כמו שלשה דמיוני שטח [87]) מרובע המספר ההוא על שנים וכמו שלשה דמיוני שטח [87]) המספר [88]) ההוא על מרובע מספר שנים וכמו מעוקב שנים וכאשר קבצנו זה בכל המספרים היה מה שזכרנו והבן ותמצא וכזה התבאר הסבה במקביל זה עם מעט עיון.

אם רצית לדעת מה יעלה המספר האחרון ממספר מונח ממספרים מתיחסים על יחס מונח מתחילין מן האחד קח מרובע היחס והנה השלישי קח מרובע השלישי והנה החמשי קח מרובע החמשי והנה התשיעי ובזה הדרך תוכל לדעת ממרובע [89]) כל מספר מהם מספר קצהו וכאשר תגיע אל מספר קרוב ממספר המונח שמור מספרו אח"כ תדע מרחקו ממספר המונה כמה גם תדע מה יעלה המספר מאלו המתיחסים [90]) אשר מרחקו ככה מן האחד ועל מספרו תערוך השמור והנה המבוקש משל זה אם רצית לדעת מה יעלה המספר האחרון מחמשה עשר מספרים מתיחסים על יחס מונח מתחילין מן האחד והיה היחס המונח שלשה ובזה יהיה המספר השני שלשה לקחנו מרובע ג' שהוא ט' והנה השלישי לקחנו מרובע ט' שהוא פ"א והנה החמישי לקחנו מרובע פ"א שהוא ו' אלפים ותקס"א והנה התשיעי ואם נקח מרובע התשיעי יהיה לנו השבעה עשר ויעבור המספר המונה ולזה נראה כמה מרחק התשיעי מן החמשה עשר והנה החמשה עשר הוא השביעי לו ולזה ראוי שנדע כמה מספר המספר השביעי לאחד וידענו כי המספר

---

82) In W. u, M. II מחמספרים, 83) in M. I fehlt bis דמיון, 84) in M. II הם ז' ב' ג in W. ז' אלף ר"נ, 85) in M. I fehlt השני, 86) in W. und M. II lautet die Stelle: וג"כ נקבץ שבעה מספרים נמשכים בהמשך שלשה הוא פ"ד ערכנום על שלשת דמיוני מרובע המספר המונח השני שהוא י"ב ועלה אלף וח' ונשמרם ג"כ וג"כ הנה מעוקבי המספר המונח השני הוא ה' ערכנום על המספר המונח הראשון שהוא ז' ועלה נ"ו חברנום עם שני השמורים ועלה ח' אלפים תרכ"ד והוא השמור הראשון המתוקן וג"כ הנה מעוקבי שבעה מספרים נמשכים מן האחד עד ז' הם תשפ"ד ערכנום על כ"ה (so in W.) שהוא מעוקב שלשה [עד כ"ז שהוא מעוקב שלשה in M. II] והנה . . . . . . 87) שטח fehlt in allen Hdschr., 88) in M. II מרובע המספר, 89) in M. II מרובעו, 90) in allen Hdschr. מתיחסים.

שהוא מרובע מספר ההמשך [80]) והנה אלף ור״ס חברנום עם שס״ד והנה אלף ותרכ״ד והוא המבוקש ויהיה גם כן הראשון פחות שנים משלשה במשלנו זה הנה ידענו שנקבין המספרים האלו הוא ע׳ והנה ק״מ ערכנום על ט׳ שהוא מרובע מספר ההמשך והנה אלף ור״ם גרענו מהם ש״ח והנה תתקנ״ב והוא המבוקש והיה זה כן לפי שאם הוסף שנים על כל אחד מהמספרים היו נמשכים בזולת דרך המספר ואולם יתרון מרובע כל מספר מהם כאשר חובר עם שנים על מרובעו הוא כפל שטח שנים במספרו ומרובע שנים וכאשר חובר זה התוספות מכל אלו המספרים היה כמו שטח שנים בכל אלו המספרים נחברים וכמו שטח מרובע שנים במספר המספרים גרענו דעולה ממרובעי המספרים הנמשכים בזולת דרך המספר בשיעור זה ההמשך ועד המספר המונח הראשון ונשאר המבוקש וכזה התבאר מקביל זה עם מעט עיון והבן ותמצא. אם רצית לחבר מעוקבי מספר מונח ממספרים נמשכים בזולת דרך המספר אלא שהמספר הראשון מתהלף למספר ההמשך בשיעור מספר מונח שני הנה אם יהיה המספר הראשון פחות ממספר ההמשך תקה מרובעי אלו המספרים ותערוך העולה על שלשה דמיוני המספר המונח השני ותשמור עוד תערוך שלשה מרובעי המספר המונח השני על נקבין אלו המספרים ושמור עוד תערוך מעוקב המספר המונח השני על המספר המונח הראשון ותחבר העולה עם שני השמורים ויהיה בידך השמור הראשון המתוקן אחר כך קח מעוקבי המספרים הנמשכים מן האחד עד המספר המונח הראשון וערכם על מעוקב מספר ההמשך ומהעולה גרע השמור הראשון המתוקן והנשאר הוא המבוקש דמיון זה אם רצינו לחבר מעוקבי שבעה מספרים שכל אחד מהם מוסיף על שלפניו שלשה והראשון פחות משלשה שנים הנה כבר ידענו שמרובעי אלו המספרים הם תתקנ״ב ערכנו זה על שלשה דמיוני שנים שהוא ו׳ והנה ה׳ אלפים ותשי״ב ונשמרם וגם כן הנה נקבין אלו המספרים הוא ע׳ ערכנום על שלשה דמיוני מרובע שנים שהוא י״ב והנה תת״מ [81]) ונשמרם גם כן ערכנו מעוקב שנים שהוא שמנה על ז׳ והנה נ״ו חברנום עם שני השמורים והנה ו׳ אלפים ותר״ח והוא השמור הראשון המתוקן הוצאנו מעוקב המספרים הנמשכים מן האהד עד ז׳ והנה תשפ״ד ערכנום על כ״ז שהוא מעוקב שלשה והנה כ״א אלפים וקס״ח גרענו מהם השמור הראשון המתוקן ונשאר י״ד אלפים ותק״מ והוא המבוקש.

ואם היה המספר הראשון מוסיף על מספר ההמשך מספר מונח שני הוצא נקבין המספר המונח הראשון ממספרים נמשכים בזולת דרך המספר בשיעור זה ההמשך המונח וכבר ידעת אופן זה המעשה במה שקדם ערוך העולה על שלשה דמיוני מרובע המונח השני והעולה שמור גם קה מרובעי המספר המונח הראשון ממספרים נמשכים בזולת דרך המספר בשיעור זה ההמשך המונח וערוך העולה על שלשה דמיוני המספר המונח השני ושמור העולה עוד תערוך מעוקב המספר המונח השני על המספר המונח הראשון וחבר העולה עם שני השמורים והעולה יהיה השמור הראשון המתוקן אחר כך הוצא מעוקבי המספר הראשון המונח

---

80) In M. II ראשק החמשך, 81) in M. II ת״ת.

אם רצית לחבר מספר מונה ממספרים נמשכים בזולת דרך המספר והיה הראשון בלתי שוה למספר ההמשך אבל הוא פחות ממנו או יותר עליו מספר מונה שני ערוך המספר המונה השני על המספר המונה הראשון והעולה הוא השמור הראשון גם קח נקבין הנמשכים מן האחד עד המספר המונה הראשון וערכהו על מספר ההמשך והוא השמור השני ואם היה הראשון פחות ממספר ההמשך תוצא השמור הראשון מהשמור השני והנשאר הוא המבוקש דמיון זה אם רצית לחבר שבעה מספרים שכל אחד מהם מוסיף על המספר שלפניו שלשה והראשון פחות שנים משלשה או [76]) מוסיף שנים על שלשה הנה שטח שנים בשבעה הוא י"ד והוא השמור הראשון ונקבין הנמשכים עד שבעה הוא כ"ח ערכנום על שלשה והנה פ"ד ואם היה הראשון פחות שנים משלשה תגרע י"ד מפ"ד וישאר ע' והוא המבוקש והסבה שאם הוספנו חסרון הראשון משלשה על כל אחד מהמספרים היו [77]) נמשכים מיחס שלשה ולזה נגרע מהעולה שטח שנים בשבעה ואם היה הראשון מוסיף על שלשה שנים הוסף י"ד על פ"ד והיו צ"ח והוא המבוקש והסבה שאם נגרע תוספת הראשון על שלשה מכל אחד מהמספרים היו נמשכים בזולת דרך המספר והקש על זה... אם רצית לחבר מרובעי מספר מונה ממספרים נמשכים בזולת דרך המספר אלא שהמספר הראשון מתחלף ממספר ההמשך בשיעור מספר מונה שני ערוך המונה השני על כפל נקבין אלו המספרים והעולה תחבר עם שטח המספר המונה הראשון במרובע המספר המונה השני אם היה הראשון פחות ממספר ההמשך ואם היה הראשון מוסיף על מספר ההמשך תגרע זה השטח שזכרנו מהעולה ומה שישאר בידך אחר התוספת או אחר הגרעון הוא השמור הראשון אח"כ קח מרובעי המספרים הנמשכים מן האחד עד המספר המונה הראשון וערוך העולה על מרובע מספר ההמשך והוא השמור השני ואם היה המספר הראשון פחות ממספר ההמשך גרע השמור הראשון מהשמור השני והנשאר הוא המבוקש ואם היה המספר הראשון מוסיף על המספר המונה השני הוסף השמור הראשון על השמור השני והוא המבוקש.

ד מ י ו ן זה אם רצית לחבר מרובעי ז' מספרים שכל אחד מהם מוסיף על המספר שלפניו שלשה והראשון מהם מוסיף שנים על שלשה או פחות ממנו שנים ויהיה תחלה הראשון מוסיף שנים על שלשה הנה ידענו שנקבין אלו המספרים הוא צ"ח וכפלהו והנה קצ"ו ערכנום על שנים והנה שצ"ב ואולם שטח מרובע שנים שהוא ארבעה בשבעה הוא כ"ח גרענום משצ"ב והנה שס"ד והוא השמור הראשון או אם תערוך שנים על כפל נקבין שבעה מספרים נמשכים בזולת דרך המספר שכל אחד מהם מוסיף שלשה על שלפניו והראשון שלשה ותחבר[78]) עם העולה שטח מרובע שנים בשבעה יעלה שס"ד ג"כ וזה ששטח [79]) כפל שנים בפ"ד הוא של"ו חברנו עמו שטח ארבעה בשבעה שהוא כ"ח ועלה שס"ד הנה אלו שני הדרכים יביאוך אל מספר אחד בעינו וזה מבואר מראש המאמר הראשון עם מעט עיון ואולם מרובעי המספרים הנמשכים עד שבעה הם ק"מ ערכנום על תשעה

[76]) In M. II הוא, [77]) in M. I fehlt היו dafür הנמשכים, [78]) in M. II יתחבר, [79]) in M. II וזה שטח ג' שנים בפ"ד הוא חברנו,

שבעה הם ק״מ ערכת אותם על י״ו שהוא מרובע המספר הראשון והנה אלפים ר״מ וככה המבוקש והיה זה כן לפי שיחס אחד אל [67]) הראשון הוא כיחס שנים אל השני וכיחס כל אחד אל גילו א״כ יהיה יחס מרובע אחד אל מרובע הראשון כיחס מרובע כל אחד מהם אל מרובע [68]) גילו ולזה יהיה יחס מרובע האחד אל מרובע גילו כיחס [69]) מרובעי הכל אל מרובעי הכל אם רצית לחבר מעוקבי מספרים נמשכים מן האחד עד מספר מונח קח מרובע נקבין הנמשכים מן האחד עד המספר המונח [70]) והעולה הוא המבוקש. דמיון זה אם רצית לדעת מעוקבי [71]) המספרים הנמשכים מן האחד עד ששה והנה נקבין הנמשכים מן האחד עד ששה הוא כ״א לקחנו מרובעו והנה תמ״א והוא המבוקש ואם היו המספרים נמשכים בזולת דרך המספר עד מספר מונח ורצינו לדעת מעוקביהם תוציא מעוקבי המספרים הנמשכים מן האחד עד המספר המונח ותערוך העולה על מעוקב המספר הראשון והוא המבוקש וכבר התבארה סבת זה במה שקדם דמיון זה שיהיה הראשון ארבעה והשני שמנה ונמשך בזה הדרך עד חמשה כבר ידוע שמעוקבי המספרים הנמשכים עד חמשה הם רכ״ה ערכנום על ס״ד שהוא מעוקב המספר הראשון ועלה י״ד [72]) אלפים וד׳ מאות וככה המבוקש.

ואם רצינו לדעת מעוקבי הזוגות ממספרים נמשכים מן האחד עד מספר מונח קח מעוקבי הנמשכים עד חצי המספר המונח וערוך העולה על מעוקב המספר הראשון שהוא שנים ומעוקבו שמנה וככה המבוקש וכבר התבארה סבת זה במה שקדם רצו׳ שאלו המספרים שבים אל המספרים הנמשכים בזולת דרך המספר דמיון זה אם רצית לדעת מעוקבי הזוגות הנמשכים עד ששה הנה מעוקבי המספרים הנמשכים עד שלשה הם ל״ו ערכנום על שמנה [73]) שהוא מעוקב המספר הראשון ועלה רפ״ח וככה המבוקש ומזה תוכל לדעת מעוקבי הנפרדים הנמשכים מן האחד עד מספר מונח רצוני שתדע תחלה מעוקבי כל המספרים עד המספר המונח ותוצא מן העולה מעוקבי הזוגות והנשאר הוא מעוקבי [74]) הנפרדים.

אם רצינו לחבר מספרים נמשכים בדרך המספר בלתי מתחילין מן האחד אבל יתחילו ממספר מונח ויכלו במספר מונח שני נקח נקבין הנמשכים מן האחד עד המספר המונח השני ושמור ונגרע מהשמור נקבין הנמשכים מן האחד עד המספר הנמשך לפני המספר הראשון דמיון זה שהיה המספר הראשון ששה ורצינו לחבר הנמשכים לו לאחריו עד מספר אחד עשר והנה נקבין הנמשכים מן האחד עד אחד עשר הוא ס״ו [75]) נגרע ממנו מספר הנמשכים מן האחד עד חמשה שהוא ט״ו ונשארו נ״א וככה המבוקש וכן תעשה במרובעי המספרים הנמשכים כאשר לא יתחילו מן האחד או המעוקבים והסבה בזה מבוארת וכן תעשה במרובעי הנפרדים הנמשכים כאשר לא יתחילו מן האחד או במרובעי הזוגות כאשר לא יתחילו משנים לזאת הסבה בעינה.

---

67) In M. II fehlt אל, 68) in M. I fehlt מרובע, 69) in M. II וכיחס, 70) in W. u. M. II am Rand מס״ב, in W. מספר מונח, 71) in W. u. M. II מעוקב, 72) in M. II nur י״ד in W. י״ד darüber geschrieben אלפים, 73) in M. II שלשים in W. ursprünglich שלשה, dann darüber corrigiert שמנה, 74) in M. I מעוקב, 75) in M. II פ״ו

והשני י״ד והשלישי כ״א והרביעי כ״ח וימשכו בזה הדרך עד תשעה מספרים כבר ידעת כי הנמשכים מן האחד עד תשעה הם מ״ה ערכם על ז׳ שהוא הראשון והנה שט״ו [60]) והוא המבוקש ויהיה זה כן לפי שיחס האחד אל הראשון כיחס השנים אל השני וכיחס השלשה אל השלישי וכיחס הארבעה אל הרביעי וכיחס החמשה אל החמישי וכיחס הששה אל הששי וכיחס השבעה אל השביעי וכיחס השמנה אל השמיני וכיחס התשעה אל התשיעי אבל יחס האחד אל קרובו כיחס הכל אל הכל א״כ יחס אחד אל שבעה כיחס הכל אל הכל אבל שבעה ימנהו אחד כמנין אחדי שבעה א״כ כלל אלו המספרים ימנהו מ״ה כמספר אחדי שבעה א״כ כבר יוכה מספר מ״ה בשבעה ויהיה העולה שוה לאלו המספרים המקובצים והקש על זה. אם רצית להבר נפרדים הנמשכים מתחילים מן האחד עד מספר מונה קח מרובע [61]) המספר האמצעי בין האחד והמספר המונה והנה המבוקש דמיון זד אם רצית להבר הנפרדים הנמשכים עד תשעה והאחד עמהם הנה המספר האמצעי בין אחד ובין תשעה הוא חמשה קח מרובעו והוא כ״ה וככה המבוקש ואם רצית לחבר הזוגות הנמשכים עד מספר מה והנה יהיה המספר הראשון שנים והשני שני דמיוניו והשלישי שלשה דמיוניו וכן ימשכו נמשכים בזולת דרך המספר וכבר קדם דרכו ולזה תקה הצי המספר האחרון לפי שהוא כמספר מספרי הזוגות הנחברים ותדע מה עלו הנמשכים מן האחד עדיו ותערוך העולה על שנים שהוא הראשון והנה המבוקש דמיון זה אם רצית לחבר הזוגות עד עשרה כבר ידעת שהנמשכים עד חמשה הם ט״ו ערכת אותם על שנים שהוא הראשון והנה ל׳ וככה המבוקש.

אם רצית לחבר מרובעי מספרים נמשכים מן האחד עד מספר מונה קח המספר [62]) המונה פחות שלישית המספר הנמשך לפניו וערכהו על נקבין הנמשכים עד המספר המונה דמיון זה אם רציה לדעת מרובעי המספרים הנמשכים עד חמשה הנה המספר הנמשך להמשה לפניו היא ארבעה גרענו ממנו שלישית ארבעה שהוא ד׳ שלישית ונשארו ארבעה פחות שלישית ערכנום על ט״ו שהוא נקבין הנמשכים עד חמשה ועלה נ״ה וככה המבוקש. ואם רצית להבר מרובעי הנפרדים הנמשכים מן האחד או מרובעי הזוגות הנמשכים עד מספר מונה רציני [63]) שיהיה המספר המונה הוא האחרון קח נקבין הנמשכים [64]) עד המספר הנמשך אחר המספר המונה וערכהו על שלישית [65]) המספר המונה [66]) דמיון זה רצינו לדעת מרובעי הנפרדים הנמשכים עד תשעה הנה נקבין הנמשכים מן האחד עד עשרה הוא נ״ה ערכנום על שלישית תשעהו הנה קס״ה וככה המבוקש ואם רצית לחבר מרובעי מספרים נמשכים בזולת דרך המספר עד מספר מונה ערוך מרובעי המספרים הנמשכים מן האחד עד המספר המונה על מרובע המספר הראשון והעולה הוא המבוקש דמיון זה אם רצית לחבר מרובעי מספרים נמשכים שהראשון ארבעה והשני שמנה והשלישי שנים עשר וימשכו בזה הדרך עד שבעה מספרים הנה כבר ידעת שמרובעי כל המספרים עד

---

60) In M. II שכ״ח, 61) in W. und M. II am Rand מכ״ט, 62) in W. und M. II am Rand מל״ה, 63) in M. I fehlt von רצונו bis הוא, • 64) in M. II noch הנמשך עד המספר, 65) in M. I fehlt שלישית, 66) in W. u. M. II am Rand מל״ו.

משתי מעלות נמשכות השלם המספר אל הכלל הקרוב ותדע מרובעו ושמור העולה אח״כ חבר המספר השלם אם המספר הנשבר וערכהו על שיעור ההשלמה והוא יהיה השמור השני ואם היתה ההשלמה לתוספת גרע השמור השני מהשמור הראשון ואם היתה ההשלמה לגרעון תוסיף השמור השני על השמור הראשון והעולה הוא המבוקש דמיון זה אם רצית לדעת מרובע שלשים ושלשה הנה תשלים המספר אל הכלל הקרוב והוא ל׳ ומרובע ל׳ הוא ט׳ מאות ושמור אח״ז תחבר שלשים עם שלשים ושלשה והנה ס״ג ערכנום על ג׳ שהוא שיעור ההשלמה והנה קפ״ט והוא השמור השני ולפי שההשלמה היתה לגרעון נוסיף קפ״ט על השמור הראשון והנה אלף ופ״ט והוא הדרוש ואם השלמת ל״ג אל מ׳ במשלנו זה הנה יהיה מרובעו י״ו מאות ושמור ותחבר ל״ג עם מ׳ והנה ע״ג תערכם על ז׳ והנה תקי״א ולפי שההשלמה היתה לתוספת תגרע תקי״א מהשמור הראשון וישאר לך אלף ופ״ט והוא הדרוש והיה זה כן לפי שיתרון[53]) מרובע מ׳ על מרובע ל״ג הוא כמו שטח ז׳ במ׳ ושטח ז׳ בל״ג וזה שוה לשטח ז׳ בע״ג והקש.

דרך אחרת קח שלישית המספר שרצית לדעת מרובעו קח מרובעו וישמור אח״כ העלהו אל המעלה הנמשכת ותגרע מהעולה השמור והנשאר הוא המבוקש דמיון רצינו לדעת מרובע ל״ג לקחנו שלישיתו והוא י״א ומרובעו קכ״א העלינו קכ״א אל המעלות הנמשכות והנה אלף ומאתים ועשר[54]) גרענו מהם קכ״א וישאר אלף ופ״ט והוא המבוקש והיה זה כן לפי שאלף נמאתים ועשר הוא עשרה דמיוני מספר קכ״א והנה יחס מרובע ל״ג אל מרובע י״א הוא יחס צלעו אל צלעו שנוי ביחס אבל[55]) יחס צלעו אל צלעו שנוי ביחס הוא יחס תשעה אל אחד א״כ מרובע ל״ג הוא תשעה דמיוני מרובע י״א וכבר היה אלף ור״י עשרה דמיוני מרובע י״א א״כ כאשר גרענו מאלף ור״י מרובע י״א יהיה הנשאר שוה למרובע ל״ג והקש על זה.

השער השלישי בחבור מספרים נמשכים או מתיחסים אם רצית לחבר מספרים נמשכים מן האחד עד מספר מונח קח[56]) חצי מרובע המספר המונח וחברהו עם חצי המספר המונח והוא המבוקש דמיון אם רצית לחבר אחד ושנים ושלשה וארבעה וכן עד עשרה ועשרה עמהם קח חצי מרובע עשרה וחציו והנה נ״ה[57]) וככה המבוקש. דרך אחרת ערוך המספר ההוא על חצי המספר הנמשך לו לאחריו או הצי המספר ההוא על המספר הנמשך לו[58]) לאחריו והוא המבוקש והנה במשלנו זה ערוך י׳ על חצי י״א או חצי י׳ על י״א והנה נ״ה וככה המבוקש ואם היו המספרים נמשכים בזולת דרך המספר ר״ל שהיה הראשון מספר מונח והשני שני דמיוני המספר המונח והשלישי שלשה דמיוניו[59]) וכן בזה הדרך עד מספר מה תחבר הנמשכים עד המספר ההוא בדרך הקודמת והעולה תערוך על המספר הראשון המונח וככה המבוקש. דמיון זה שיהיה הראשון שבעה

---

53) In W. und M. II am Rand ׳מד׳ ומו, 54) in M. I fehlt לפי שאלף ור״י, 55) in M. fehlt bis שנוי ביחס הוא, 56) in W. am Rand ממ״א, 57) in W. am Rand ערוך המספר ההוא על חצי המספר הנמשך ההוא מכ״ו ומכ״ח, 58) in W. החוא statt לו, in M. II לאחריו והוא המבוקש, 59) in den Hdschr. דמיוני.

על ל״ד הוא כ״ז ערכנו כ״ז על ד׳ והנה ק״ח [47]) והוא השמור השני ולפי שהתוספת על המספר הגדול תוסיף השמור השני על השמור הראשון והנה אלף ותתקל״ה והוא המבוקש ואם העלית ל״ד אל מ׳ תגרע מנ״ז ו׳ והנה נ״א תערכם על מ׳ והנה אלפים וארבעים והוא השמור הראשון והנה יתרון נ״א על ל״ד הוא י״ז תערכם על ו׳ והנה ק״ב והוא השמור השני ולפי שנגרעת מהמספר הגדול תגרע השמור השני [48]) מהשמור הראשון וישאר אלף ותתקל״ח והוא המבוקש ופעמים יצא לך לפי זה הדרך שיהיה לך להכות מספר על עצמו ואז יקל מאד זה הדרך משל זה שיהיה לך להכות מ״ג על נ״ז ואם תשלים מ״ג על נ׳ תחסר מנ״ז [49]) שיעור ההשלמה ויהיה נ׳ ויהיה לך להכות נ׳ על נ׳ ולחסר מהעולה מרובע ז׳ והנשאר הוא המבוקש וזה מבואר מאד ממה שקדם בראש המאמר הראשון מזה הספר והבן ותמצא.

דרך אחרת בזה השלם המספר האחד אל הכלל הקרוב ועל העולה ערוך המספר האחר ושמור העולה גם ערוך המספר האחר על שיעור ההשלמה ושמור העולה והוא השמור השני ואם היתה ההשלמה לתוספת נגרע השמור השני מהשמור הראשית והנשאר הוא המבוקש ואם היתה ההשלמה למגרעת תוסיף השמור השני על השמור הראשון והעולה הוא המבוקש דמיון זה במשלנו הקודם השלמנו נ״ז אל הכלל הקרוב והנה ס׳ ערכנו ס׳ על ל״ד והנה אלפים וארבעים והוא השמור הראשון והנה שיעור ההשלמה הוא שלשה ערכנו שלשה על ל״ד [50]) והנה ק״ב והוא השמור השני ולפי שהשלמה היתה לתוספת נגרע השמור השני מהשמור הראשון ונשאר אלף ותתקל״ח והוא המבוקש וג״כ במשלנו זה אם השלמנו ל״ד אל הכלל הקרוב יהיו ל׳ ערכנו ל׳ על נ״ז [51]) ועולה אלף ת״ש והוא השמור הראשון והנה שיעור ההשלמה הוא [52]) ד׳ ערכנו ד׳ על נ״ז ועלה רכ״ח והוא השמור השני ולפי שההשלמה היתה למגרעת נוסיף השמור השני על השמור הראשון ויעלה אלף ותתקל״ח והוא המבוקש ואם תרצה לדעת מרובע מספר נשבר מונח הנה תשלים המספר אל הכלל הקרוב ושיעור ההשלמה תגרע מהמספר המונח והנשאר תכה על המספר המושלם והוסף על העולה מרובע מספר ההשלמה והנה המבוקש . משל זה אם רצית לדעת מרובע מ״ז הנה הכלל הקרוב הוא נ׳ ומרחקו ממ״ז הוא שלשה תגרעם ממ״ז והנה מ״ד ערכת מ״ד על נ׳ והנה אלפים ומאתים והנה המרחק הוא שלשה שהוא תשעה והנה אלפים ור״ט והוא המבוקש.

דרך לדעת בקלות מרובע מספר ממעלה אחת ראה יחס המספר אל יחס אחד ממעלה הנמשכת וקח כמו היחס ההוא מהמספר שרצית לדעת מרובעו וערכהו על אחת מהמעלה הנמשכת והוא המבוקש דמיון רצית לדעת כמה מרובע שלשים והנה יחס שלשים אל מאה שהוא אחד מהמעלה הנמשכה הוא שלש עשיריות קח שלש עשיריות שלשים והנה ט׳ ערכם על מאה והנה ט׳ מאות והוא המבוקש והיה זה כן לפי ששלשים אמצעי בין ט׳ ובין ק׳ ואם היה המספר שרצית לדעת מרובעו

---

47) In M. II כ״ב, 48) fehlt in W., 49) in M. II מנ״ג, 50) in M. II ד׳
51) in M. II נ״ו, 52) in M. II עלה ד׳ על נ״ו.

בששית ה׳ בשביעית ח׳ בשמינית ד׳ בתשיעית ד׳ בעשירית ו׳ באחד עשרה ב׳ בשנים עשרה א׳ בשלש עשרה והקש על זה.

ואם רצינו לדעת כמה יעלה מספר המרובע ההוה ממספר מונה נכתוב המספר אשר רצינו לדעת מרובעו בטור אחד ותחתיו תשוב ותכתבנו בטור אחר תחת הטור הזה והכה כל מספרי הטור העליון על כל מה שבמדרגות הטור השפל ויצא לך המבוקש ואם רצית לדעת כמה יעלה המספר המעוקב ההוה ממספר מונה תצטרך לעשות שתי תמונות ראשונה תכה המספר ההוא על עצמו ויצא לך מרובע המספר שרצית לדעת מעוקבו עוד תעשה תמונה אחרת ותכה המספר המונה שרצית לדעת מעוקבו על מרובעו שיצא לך והעולה הוא המבוקש.

ולהקל מעליך אתן לך דרכים רבים לחשוב בהם הכאת מספר במספר בקלות כבר ידעת שהכאת מספר במעלה הראשונה במספר ממעלה הראשונה הוא קל המעשה וכן הכאת מספר נשבר רצוני מספר מה ממעלה ראשונה ושניה על מספר מעלה ראשונה ואם היה לך להכות מספר נשבר על מספר נשבר השלם המספר האחד מהם אל הצד אשר הוא היותר קרוב ואם הוספת על זה המספר להשלימו אל הכלל הקרוב גרע מהמספר האחר כשיעור מה שהוספת על המספר הראשון והנשאר הכה אותו על המספר השלם אשר בידך ושמור העולה ואם גרעת מזה המספר להשלימו הוסף על המספר האחר כשיעור מה שגרעת מזה המספר הראשון והנשאר בידך הכה אותו על המספר השלם אשר בידך ושמור העולה אחר כן ראה המספר הגדול אחר התוספות או אחר הגרעון כמה הוא מוסיף על המספר הקטן טרם התקון והתוספת ההוא ערוך על שיעור המספר שהוספת על אחד מהמספרים והעולה שמור והוא השמור השני וראה אחר כן מאי זה מספר שגרעת ואם גרעת מהמספר הגדול תגרע השמור השני מהשמור הראשון והנשאר בידך הוא המבוקש ואם הוספת על המספר הגדול הוסף השמור השני על השמור הראשון והוא המבוקש.

ואתן לך איזה משלים נרצה להכות ל״ד על נ״ז השלמנו מספר נ״ז אל הכלל הקרוב ויהיה ס׳ ולפי שס׳ מוסיף על נ״ז שלשה נגרע מל״ד שלשה ויהיו ל״א ונכה ל״א על ס׳ יהיו אלף ושמנה מאות וששים והוא השמור הראשון ולפי שס׳ מוסיף על ל״ד כ״ו[45]) נערוך כ״ו על שלשה והנה ע״ח והוא השמור השני ולפי שהוספנו על המספר הגדול נוסיף השמור השני על השמור הראשון והוא אלף ותשע מאות ול״ה והוא המבוקש ובמשלנו זה אם הורדנו נ״ז אל הכלל שלמטה ממנו יהיה נ׳ הוספנו על ל״ד ז׳ והנה מ״א ערכנו מ״א על נ׳ והנה אלפים וחמשים והוא השמור הראשון ומפני שנ׳ מוסיף על ל״ד י״ו נערוך י״ו על ז׳ והנה קי״ב והוא השמור השני ולפי שגרענו מהמספר הגדול נגרע השמור השני מהשמור הראשון ונשאר אלף וט׳ מאות ול״ה והוא המבוקש וגם במשלנו זה אם הורדת ל״ד אל הכלל הקרוב אליו יהיה ל׳ הוספת על נ״ז ד׳ והנה ס״א[46]) ערכת ל׳ על ס״א והנה אלף ושמנה מאות ושלשים והוא השמור הראשון והנה יתרון ס״א

---

45) In M. II כ״ח, 46) in M. II ס״ד.

כן תשוב להכות המספר השני שבטור העליון על כל מה שבמדרגות הטור התחתון על הסדר ותחל לכתוב העולה במעלת המכה בטור השני מטורי העולה ואחר ימשכו מעלות הטור העולה על הסדר אחר כן תשוב להכות המספר השלישי שבטור העליון על כל מה שבמדרגות הטור התחתון על הסדר ותכתוב העולה על הסדר שקדם וכן עד כלות כל מספרי הטור העליון אחר כן תחבר כל מספרי טורי העולה ותכתוב העולה בטור אחד תחת טורי העולה והוא שטח המספר האחר[36]) בשני כי כבר הוכו כל חלקי זה בכללם על חלקי זה בכללם. ד מ י ו ן נרצה בזאת הצורה להכות[37]) ז׳ אלפי אלפים ושלשים על מאה ושמנים אלף ושש מאות וארבעים והנה המספר אשר החזוק היותר מעט מהמעלות הוא ז׳ אלפי אלפים ושלשים[38]) ונכתבהו בטור העליון במקומותיו והמספר האחר כתבנו בטור אחר תחתיו והנה המספר הראשון שבטור העליון הוא ג׳ בשנית הכינו ג׳ על מה שבמדרגה הראשונה מהטור התחתון שהוא גלגל ועלה גלגל וכתבנוהו במעלה השנית בראשון שבטורי העולה הכינו ג׳ על מה שבמדרגה השנית מהטור התחתון שהוא ד׳ ועלה י״ב ונכתוב ב׳ במדרגה השלישית בטור העולה והעשרה יהיו אחד בשנית לה הכינו ג׳ על מה שבמדרגה השלישית מהטור התחתון שהוא ו׳[39]) ועלה י״ח ואחד שנשאר לנו שם והנה י״ט ונכתוב ט׳ במדרגה הרביעית בטור העולה והעשרה יהיו אחד בשנית לה הכינו ג׳ על מה שבמדרגה הרביעית שהוא גלגל ועלה גלגל ואחד שנשאר לנו שם והנה א׳ וכתבנוהו בטור העולה אחר ט׳ הכינו ג׳ על מה שבמדרגה החמישית שהוא ה׳ ועלה ועלה כ״ד וכתבנו ד׳ אחר הא׳ והכ׳ יהיו שנים בשנית לה הכינו ג׳ על מה שבמדרגה הששית שהוא א׳ ועלה ג׳ וב׳ שנשארו לנו שם והנה ה׳ ונכתוב ה׳ אחר ד׳ בטור העולה ופה נשלמה הכאת ג׳ על כל מה שבמדרגות הטור התחתון. ונכה המספר הבא אחר הג׳ בטור העליון שהוא ז׳[40]) על כל מה שבטור התחתון הכינו ז׳ על גלגל ועלה גלגל ונשימהו בטורי העולה בטור השני במעלה השביעית כנגד ז׳ במעלה השביעית הכינו ז׳ על ד׳ ועלה כ״ח ונכתוב ה׳ אחר הגלגל והכ׳ תהיינה ב׳ במעלה השנית לה הכינו ז׳

על ו׳ ועלה מ״ב וב׳ שנשארו לנו	0 ג 0 0 0 0 ז
שם והנה מ״ד ונכתוב ד׳ אחר הח׳	0 ד ו 0 ח א
והמ׳ תהיינה ד׳ בשנית לה הכינו	0 0 ב ט א ד ה
ז׳ על גלגל ועלה גלגל וד׳ שנשארו	0 ח ד ד ו ב א

שם והנה ד׳ ונכתבם אחר הד׳[41]) 0 0 ב ט א ד ה ח ד ד ו ב א הכינו ז׳ על ח׳[42]) ועלה נ״ו ונכתוב[43]) ו׳ אחר הד׳ והנ׳ תהיינה ה׳ בשנית לה הכינו ז׳ על א׳[44]) ועלה ז׳ וה׳ שנשארו לנו שם והנה י״ב ונכתוב ב׳ אחר הו׳ והי׳ נעשו א׳ במעלה השנית לה ופה נשלמה הכאת כל מספרי הטור התחתון והנה העולה הוא גלגל בראשונה גלגל בשנית ב׳ בשלישית ט׳ ברביעית א׳ בחמשית ד׳

---

36) Fehlt in M. II, 37) fehlt in M. II, 38) in M II שלשה, 39) in M. II ז׳, 40) in M. II ח׳, 41) in M. II ב׳, 42) in M. II ז׳, 43) fehlt in M. I und M. II, 44) in M. II ז׳.

המכה מהראשונה והמשל שיהיה לנו להכות ששה מהשלישית על שבעה מהשנית והוא מבואר שיחס אחד מהראשונה אל אחד מהשלישית כיחס אחד מהשנית אל אחד מהרביעית אבל יחס ששה מהראשונה אל ששה מהשלישית הוא [29]) כיחס אחד מהראשונה אל אחד מהשלישית לפי שהכפלים שוים ויחס שבעה מהשנית אל שבעה מהרביעית הוא כיחס אחד מהשנית אל אחד מהרביעית אם כן יחס ששה מהראשונה אל ששה מהשלישית כיחס שבעה מהשנית אל שבעה מהרביעית אם כן שטח ששה מהשלישית בשבעה מהשנית כמו שטח ששה מהראשונה בשבעה מהרביעית ואולם שטח אחד מהראשונה בשבעה מהרביעית הוא מהרביעית [30]) אם כן שטח ששה [31]) מהראשונה בשבעה מהרביעית הוא מאהדי הרביעית וזה כי הוא ששה דמיוני שבעה מהרביעית ובזה המופת בעינו יתבאר שהכאת שברים משברי חכמי התכונה בשברים הם מהמעלה אשר מרחקה מהמוכה לפניה[32]) כמרחק המכה ממעלת השלמים לפי שהמדרגות ההם הם מתיחסות גם כן ולזה יהיה העולה בהכאת מספר ממדרגת שברים על מספר ממדרגת שברים מהמדרגה אשר מספר מעלותיה כמספר המכה והמוכה מקובצים והסבה בזה שלא נמנית בשברים מדרגת האחדים אשר ממנה התחלתם אך התחלת מנין המעלות מהשברים הראשונים וזה מבואר מאד וכזה התבאר מזה שהעולה בהכאת האחדים מהמעלה הראשונה על שברים ממעלה מה הוא ממעלת השברים בעצמם וזה מה שרצינו להציע הנה יתבאר בו מה שרצה לבאר ואולם הכאת שברים בשברים או בשלמים הוא חלוק ע״ד האמת ולזה לא נבאר ענינו בזה השער.

הדרך אשר תלך בה בהכאת מספר על מספר ראוי לך שתכתוב המכה בטור אחד כפי מעלותיו והמוכה בטור אחד תחתיו כפי מעלותיו גם כן ולהקל מעליך שים המספר אשר יותר מעט במעלות אחז [33]) בטור הראשון ואם הוא רב בכמות כי הכל הולך אל מקום אחד רצוני שהכאת האחד באחר כהכאת האחר בו וזה התבאר באקלידס אחר כן עשה טורים תחת אלו שני הטורים כמספר המעלות אשר יש בהם מספר בטור הראשון והם יהיו הטורים אשר תכתוב בהם העולה בהכאת אלו המספרים [34]) איש אל אחיו ואחר עשותך זה הכה המספר הראשון שבטור העליון על המספר הראשון [35]) שבטור התחתון והעולה תשים בראשון מטורי העולה במעלה הראויה לפי מה שקדם ולהקל מעליך שלא תצטרך לחשוב אנה תשים העולה כפעם בפעם הכה המספר הראשון שבטור העליון על מה שבמדרגה הראשונה שבטור התחתון וכתוב העולה בטור הראשון מטורי העולה במדרגת המכה תשוב להכותו על מה שבמדרגה במעלה השנית בטור התחתון ותכתוב העולה במעלה הנמשכת למעלה שהחילות לכתוב בה העולה וכזה תכה המספר הראשון שבטור העליון על כל מה שבמדרגות הטור התחתון ותכתוב העולה כפעם בפעם במעלה הנמשכת אחר המעלה אשר כתבת בה קודם זאת ההכאה אחר

29) In M. II fehlt bis לפי, 30) in W. noch שבעה, 31) in M. II fehlt ששה, 32) in W. am Rand: כל השברים היותר דקים הם לפניה, 33) in W. אחר, in M. I fehlt d. Wort, vgl zu dem Wortspiel Jesaja Cap. 38, 8, 34) in W. u. M. II sind die Worte umgestellt איש אל אחיו אלו המספרים, 35) in W. u. M. II העליון.

בטור העולה במעלה החמשית והנה העולה הוא שלשים אלף ושמנה מאות ושבעים ושלשה שלמים י׳[20] ראשונים מ״ה שניים נ״ח שלישיים מ״ז רביעיים[21] נ״ג ששיים והקש על זה ופעמים יבואך[22] החשבון בחכמת התכונה לגרוע מספר רב ממספר מעט וזה במלאכות הככבים ואז תוסיף מעלת הגלגל שהם שלש מאות וששים על המספר המעט שבאת לגרוע ממנו ותוכל לגרוע מה שתרצה לפי שאין להם מספר משלמים במקומות הככבים מוסיף על שלש מאות וששים כי כאשר יהיה להם יותר משלש מאות וששים ישליכו ויקחו הנשאר וכזה יבואך החשבון בחשבון מולד הלבנה המתפשט בהמון לגרוע ממספר מעט מספר רב ואז תוסיף על המספר המעט ז׳ ימים ותוכל לגרוע מה שתרצה וסבת זה כי מחשבי המולדות כאשר יהיה להם מספר מוסיף על ז׳ ימים ישליכו[23] ממנו ז׳ ימים ויקחו הנשאר והקש על זה.

השער השני בחבור מספרים דומים והוא הכאת מספר על מספר. כבר ידעת כי כאשר היו ארבעה מספרים מתיחסים רצוני שיחס הראשון אל השני כיחס השלישי אל הרביעי הנה שטח הראשון ברביעי כמו שטח השני בשלישי ולזה יתבאר שהכאת אחד מהשנית באחד מהרביעית הוא אחד מהחמישית וזה שיחס אחד מהראשונה אל אחד[24] מהשנית כיחס אחד מהרביעית אל אחד מהחמישית א״כ שטח אחד מהשנית באחד מהרביעית הוא כמו שטח אחד מהראשונה באחד מהחמשית אבל[25] שטח אחד מהראשונה באחד מהחמשית הוא אחד מהחמשית לפי שהוא אחד מהחמשית פעם אחת אם כן שטח אחד מהשנית באחד מהרביעית הוא אחד מהחמשית וכזה התבאר ששטח אחד מהשלישית באחד מהרביעית הוא אחד מהששית לפי שביחס השני יהיה יחס אחד מהראשונה אל אחד מהשלישית כיחס אחד מהרביעית אל אחד מהששית וכאשר תנהיג זה יבואר לך שכל אחד ממעלה[26] אי זו שתהיה שיוכה על אחד ממעלה אי זו שתהיה הוא אחד מהמעלה אשר מרחקה מאחד המוכה לאחריה כמרחק מעלת האחד המכה[27] מהראשונה וזה שוה למספר מעלת המכה והמוכה פחות אחד לפי שאחת מהמעלות תמנה שתי פעמים משל זה שיחס הראשונה אל הרביעית כיחס החמשית אל השמינית כי השמינית רביעית להמשית בהמנות החמשית וכבר נמנית החמשית במספר מעלותיה אם כן החמשית נמנית שתי פעמים ולזה תחסר אחת ממספר מעלות המקובץ[28] ואם הוכה מספר מה מאחדי מעלה מה על אחדי מספר מה מאחדי מעלה מה בזה בעצמו יתבאר שהעולה יושם במעלה אשר מרחקה מהמעלה המוכה לאחריה כמרחק

---

20) ׳י fehlt in M. I und M. II, 21) fehlt in M. II, 22) in W. und M. II יבואך החשבון בחשבו, 23) in W. und M. II ישליכוהו, 24) in M. II fehlt bis אל אחד מהחמשית, 25) in M. II fehlt bis ה״א, 26) in den Hdsch. ממעלת, 27) in den Hdsch. מעלה האחד המכה הראשנה מהראשונה, 28) in W. am Rand: רצה בזה שאף שהשמינית רביעית מהחמשית לא ישוה זה להוסיף על החמשה ארבעה מזולת הסרון אחד לפי שהמספרים שיחוברו זה עם זה לא ימצא להם אחד משותף כלומר שאם נוסיף ארבעה עם חמשה לא ימצא מן ארבעה או חמשה אחד לשתפם יחד אבל אם נאמר יחס חמשה לשמנה כיחס אחד לארבעה היה האחד החמשי משותף לחמשה ולשמנה וזה היה ההתיחסות כיחס א׳ לד׳ והתוספ׳ ג׳ לבד.

בה ואם היית בשלמים הורד אחת מהמדרגה הבאה אחריה אליה יהיו עשרה בה ואחר תוכל לגרוע מה שתרצה וכן תעשה עד שיגרע כל הטור התחתון מהטור העליון והנשאר תכתוב כפעם בפעם בטור העולה במקומותיו וכאשר ישלם זה הוא מבואר שכבר גרעת המספר התחתון בכללו מהמספר העליון כי חלקי הדבר בכללם שוים לכל הדבר וראוי שיהיה בטור שתגרע ממנו רב הכמות מבטור השני כי אי אפשר לגרוע הרב מהמועט · · · דמיון נרצה לגרוע מאתים ושש והמשים ראשונים ל״ז שלישיים מל״א אלפים ושמנים ומ״ו שניים ל״ה שלישיים מ״ז רביעיים נ״ג ששיים והנה כתבנו המספר שממנו נגרע בטור העליון והמספר שרצינו לגרוע בטור התחתון במקומותיהם ועשינו רושם בין השלמים לשברים.

0 י ז ט	מה
ג א 0 ח 0	0 מו לה מז 0 נג
ב 0 ו	נ 0 לז
ג 0 ח ז ג	י מה נח מז 0 נג

והנה המדרגה היותר דקה היו ששיים ומה שכנגדה בטור העליון הוא נ״ג ששיים ונגרע מהם מה שכנגדם בטור התחתון ואין שם בטור התחתון דבר על כן תכתוב נ״ג בטור העולה במדרגת הששיים נשוב לגרוע מהגלגל הבא אחר נ״ג מה שכנגדו בטור התחתון ואין שם בטור התחתון דבר על כן תכתוב גלגל בטור העולה במדרגת החמשיים נשיב לגרוע ממ״ז מה שכנגדו בטור התחתון ואין שם דבר ולכן תכתוב מ״ז בטור העולה במדרגת הרביעיים נשוב לגרוע מל״ה שבטור העליון מה שכנגדו בטור התחתון והנה כנגדו ל״ז ולא נוכל לגרוע מל״ה ל״ז על כן נקח אחד ממדרגה הבאה אחר ל״ה ויהיה ששים בה נחברם עם ל״ה ויהיו צ״ה נגרע מהם ל״ז נשארו נ״ח וכתבנום בטור העולה במדרגת השלישיים ולזה נשארו במדרגה הבאה אחריה מ״ה נגרע מהם מה שכנגדם בטור התחתון ואין שם דבר ולזה תכתוב מ״ה בטור העולה במדרגת השניים נשוב לגרע מהגלגל מה שכנגדו בטור התחתון והנה כנגדו נ׳ ולא נוכל לגרוע מגלגל נ׳ וגם במדרגה הסמוכה לה מהשלמים אין מספר מה להוריד אליה ואולם בשלישית לה מספר והוא ח׳ ונוריד מהם אחד אל המעלה שלפניה ונכתוב על החי ז׳ והאחד שנוריד יהיה עשרה בראשונה נוריד מהם א׳ אל מעלת הראשונים וישארו ט׳ בראשונה ונכתבם על הגלגל והאחד שהורדנו יהיה ששים במדרגת הראשונים נגרע מהם נ׳ וישארו י׳[15]) ונכתבם בטור העולה במדרגת הראשונים נשוב לגרוע מט׳ מה שכנגדה בטור התחתון שהוא ו׳ ונשארו ג׳ ונכתבם בטור העולה במדרגת האחדים נשוב לגרוע מז׳[16]) מה שכנגדו בטור התחתון וישארו ז׳ כי אין בו דבר ונכתבם בטור העולה במדרגה השנית נשוב לגרוע מגלגל מה שכנגדו בטור התחתון והיה כנגדו ב׳ ולא נוכל לגרוע ב׳ מגלגל[17]) ובמעלה השנית לה א׳ ונורידנו אליו יהיה עשרה בה ונכתוב על הא׳ גלגל ונגרע מי׳ ב׳ ונשארו ח׳ ונכתבם בטור העולה במדרגה השלישית נשוב לגרוע מגלגל[18]) מה שכנגדו בטור התחתון ואין שם דבר ונכתוב גלגל בטור העולה במדרגה הרביעית נשוב לגרוע מג׳[19]) מה שכנגדו בטור התחתון ואין שם בו דבר ולזה נכתוב ג׳

---

15) In M. II und W. noch והם ראשונים ולזה נכתבם במעלת הראשונים, 16) in M. II מו׳, 17) in M. I noch ו׳, 18) in M. II und W. fehlt מגלגל, 19) in M. II und W. נשוב לגרוע מג׳ מה שכנגדו בטור התחתון ונשאר ג׳ ונכתכם בטור העולה במדרגה החמשית.

ובאשר ישלם לך זה חבר כל מה שנמצא בכל הטורים במדרגת השברים היותר דקים ואם עולה יותר מששים גרעם מהם ומהששים תעשה אחד במדרגה השניה לה והנשאר כתוב במדרגה ההיא בטור העולה וכן עד חברך כל השברים ובחברך הראשונים עם עלה יותר מששים או ששים תעשה מהששים אחד שלם בטור העולה. דמיון נרצה לחבר נ״ו[11]) שניים עם כ׳ ראשונים ומ׳ שניים ול׳ שלישיים ועם מ״ו ראשונים כ״ז שניים נ״ה שלישיים ותכתוב בג׳ טורים בזאת
הצורה הטור הראשון גלגל באחרונה נ״ו בשנייה לה לאחור הטור נו 0
השני כ׳ באחרונה מ׳ בשניה לה לאחור[12]) ל׳ בשלישית הטור ל מ כ
השלישי מ״ו באחרונה כ״ז בשנית לה נ״ה בשלישית טור העולה. נה כז מו
והנה המדרגה אשר שבריה יותר דקים באלה הטורים היא כה ד ח | א
השלישית חברנו כל מה שבכל אלו הטורים בשלישית ועלה פ״ה נגרע מהם ס׳ ונשארו כ״ה ותכתבם בטור העולה בשלישית והס׳[13]) שגרענו יהיה א׳ בשנית חברנו מה שבכל אלו הטורים בשנית עם הא׳ שנשאר לנו שם ועלה קכ״ד ונכתוב ד׳ בטור העולה והק״כ תהיינה ב׳ באחרונה חברנו מה שבכל אלו הטורים באחרונה עם הב׳ שנשארו לנו שם והנה ס״ח ונכתוב ח׳ בטור העולה באחרונה והס׳[13]) יהיו אחד שלם ונכתוב אחר האחרונה ונעשה שם רושם אחד יבדיל בין השלמים לשברים והנה העולה הוא אחד שלם ח׳ ראשונים ד׳ שניים כ״ה שלישיים והקש על זה.

ואם היו המספרים שבאת לחבר שלמים ושברים תכתוב תחלה השלמים בדרך שהראיתיך ותעשה רושם בין מעלת האחדים לשברים כדי שלא יתבלבל עליך ותכתוב קודם האחדים השברים הראשונים ולפני הראשונים השניים וכן מה שהגיעו הראשונים[14]) כמו שקדם ובאשר ישלם לך זה תחל לחבר מהשברים היותר דקים ותחבר השברים עם השברים והשלמים עם השלמים בדרך שזכרנו ותכתוב העולה בטור אחד תחת אלו הטורים במקומותיו ואתן לך משל איך תכתוב הטור שבו שברים ושלמים אם רצית לכתוב מאתים ושלשים שלמים ל״ז שניים מ״ד רביעיים מ״ה חמישיים הנה השלמים יהיו גלגל בראשונה ג׳ בשניה ב׳ בשלישית ותעשה רושם בין הראשונה והשברים ותכתוב אחר הרושם קודם הראשונה מהשלמים גלגל לפי שאין בזה המספר ראשונים ובשניה לה לאחור תכתוב ל״ז שהם שניים ובשלישית לה לאחור תעשה גלגל לפי שאין בזה המספר שלישיים וברביעית לה לאחור תכתוב מ״ד ובחמישית לה לאחור תכתוב מ״ה כזאת הצורה מ״ה מ״ד 0 ל״ז 0 | 0 ג ב ואולם החבור בזה ידוע ממה שקדם.

אם רצית לגרוע מספר ממספר כתוב המספר שממנו תגרע בטור אחד כפי מדרגותיו ותחתיו בטור האחר המספר שרצית לגרוע והנה תראה איזה מדרגה היא היותר דקה בכל הטורים ותחל לגרוע במה שמדרגה היותר דקה בטור העליון מה שכנגדה בטור התחתון והנשאר תכתוב בטור העולה במדרגה ההיא ואם לא היה די לגרוע אם היית בשברים הורד אחת מהמדרגה הבאה אחריה אליה יהיו ששים

11) In M. II י״ו, 12) לה לאחור fehlt in W. und M. II, 13) in M. II והס פ׳,
14) so in allen Hdschr., wohl השברים.

איש תחת אחיו והאבנים תהיינה אשה נגדה מכונות לכל הטורים וכאשר ישלם[8] לך זה כתוב העולה בחברך אלו המספרים תחת הטורים ההם בטור אחד במקומות הראויות לו לפי מעלותיו. הדרך תלך בה בחבור אלו המספרים חבר מה שבכל הטורים באבן הראשה ואם עלה יותר מתשעה תעשה מהעשיריות אחדים בשנית כי כל אחד ממנה עשרה מאחדי המעלה הראשונה והנשאר תכתוב בטור אשר תחת כל הטורים באבן הראשה גם כן והוא אשר נקראהו טור העולה אחר כן תשוב להבר מה שבאבן השנית בכל הטורים ואם עולה יותר מתשעה תעשה מהעשיריות אחדים בשלישית והנשאר תכתוב באבן השנית בטור העולה אחר כך תשוב לחבר מה שבאבן השלישית בכל הטורים ותכתוב העולה בדרך שזכרנו בטור העולה וככה עד כלות כל המספרים שבכל המעלות וכאשר ישלם זה הוא מבואר שהעולה הוא המקובץ מכל המספרים כי כבר חוברו חלקי זה בכללם עם חלקי זה בכללם וכלל הדבר שוה לכל חלקיו. דמיון תרצה לחבר ר״ט עם שלשת אלפים שמנים ותשע ועם ז׳ אלפים ושש מאות ושלשים ותשע ונכתבם

בג׳ טורים בזו הצורה הטור הראשון ט׳ בראשונה גלגל בשניה	ט 0 ב
ב׳ בשלישית הטור השני ט׳ בראשונה ח׳ בשניה גלגל בשלישית	ט ח 0 ג
ג׳ ברביעית הטור השלישי ט׳ בראשונה ג׳ בשניה ו׳ בשלישית	ט ג ו ז
ז׳ ברביעית חברנו מה שבראשונה בכל הטורים ועלה כ״ז	ז ג ט 0 א

ותכתוב בטור העולה ז׳ בראשונה והכ׳ תהיינה ב׳ בשניה חברנו מה שבשניה בכל הטורים ועלה י״א וב׳ שנשארו לנו שם והנה י״ג ותכתוב בטור העולה ג׳ בשניה והעשרה תהיינה א׳ בשלישית חברנו מה שבאבן השלישית בכל הטורים ועלה ה׳ וא׳ שנשאר לנו שם והנה ט׳ ותכתבם בטור העולה באבן השלישית חברנו מה שבמעלה הרביעית בכל הטורים ועלה עשרה על כן תכתוב גלגל בטור העולה והעשרה תכתוב אחד בחמישית בטור העולה ופה נשלם חבור הלקי אלו[9] המספרים קצתם עם קצת. והנה העולה בחברך אלו המספרים היא רבוא ותשע מאות ול״ז והקש על זה. ואם תרצה לחבר שברים עם שברים ויהיו השברים משברי חכמת התכונה כתוב השברים מהמספר האחד בטור אחד כפי מדרגתם רצוני שאם הראשונים תכתבם באבן האחרונה שבטור הפך מה שעשית בשלמים ואם אין[10] ראשונים תכתוב שם גלגל והשניים תכתוב בשנית לאחרונה לאחור והשלישיים בשלישית לאחור לאחרונה וכן עד השלימך לכתוב כל השברים שבמספר האחד וכן תעשה לשברי כל המספרים] תכתבם איש על מקומו בזה הדרך והיה זה כן כי מנהג מדרגת השברים הם בהפך מדרגת השלמים כי מדרגת השלמים ימצא בהם הקצה האחד לבד והיא המדרגה היותר מעטה ובשברים ימצא הענין בהפך כי הקצה הנמצא בהם היא היותר גדולה ולפי שעל הסדר הקודם היתה המדרגה היותר גדולה אחר היותר מעטה והיו הראשונים מהמדרגה היותר גדולה במוחלט ראוי שיהיו הראשונים במדרגה האחרונה מהשברים במוחלט

8) In W. יש לך. 9) in W. חבור חלק מאלו, in M. II חבור חלק אלו, 10) in W. und M. II אינם.

המספר הדרוש הוא באחד משני דרכים אם במחברת אם במגרעת ומה שיהיה ממנה בזולת אלו הוא הנודע[6]) בעצמו ואשר במחברת הם בשני דרכים אם שנחבר מספרים דומים אם בלתי דומים ואשר בחבור מספרים בלתי דומים הם בשלשה דרכים אם שיתחלפו בכמותם אם שיתחלפו בנושאיהם וישתתפו בכמותם אם שישתתפו בכמותם ובנושאיהם ולא יתחלפו כי אם בסדר לבד ואשר יתחלפו בכמותם הם בשני דרכים אם שיהיו המספרים או המספר שנוסיף ידועים או בלתי ידועים ואשר הם בלתי ידועים הם בשני דרכים אם שיתוספו בשיעור שוה רמוז אליו ויהיה זה בשיהיו נמשכים אם שיתוספו בשיעור בלתי רמוז אליו אבל יהיו מתיחסים רצ׳ שיהיה יחס זה אל זה כיחס זה אל זה. ואשר במגרעת בשני דרכים אם שיגרע מספר או מספרים ממספר אם שנחלק מספר על מספר ואשר הוא בחלוק מספר על מספר הוא בשני דרכים אם שיהיה המספר הנחלק עליו ידוע אם בלתי ידוע כהוצאת שרשי המרובעים והמעוקבים אלו הם החלקים הפשוטים אשר תפשטם החלקה וכבר תהיה שם מלאכה ישתמשו בה ברוב אלו המינים או בכללם והוא הוצאת המספר אשר ערכו למספר מה כערך מספר מונה על מספר מונה ומה שידמה לזה מהוצאת הנעלם מהידוע בזה האופן ואנחנו בע״ה נבאר ענינינו אלו המלאכות והדרכים אשר בהם יושג הדרוש בזה המאמר וחלקנו זה המאמר לפי זאת החקירה לששה שערים.

השער הראשון בהוסיף מספר או מספרים ידועים על מספר ובגרוע מספר או מספרים ידועים ממספר.

השער השני בחבור מספרים דומים.

השער השלישי בחבור מספרים נמשכים או מתיחסים.

השער הרביעי בחבור מספר מנושאים מה תתחלפנה המחברות בנושאיהן או בסדריהן לבד או בשניהם יחד.

השער החמישי בחלק מספר על מספר היה שיהיה המספר שיתחלק עליו ידוע או בלתי ידוע.

השער הששי בערכין.

השער הראשון בחבור המספרים קצתם עם קצת ובמגרעת המספרים קצתם מקצת.

כבר הת׳ כי כל המספרים יכלו אל תשעה ואחר שכן הוא הנה יהיה המספר אשר בתכלית מעלה[7]) אחת מן המעלות הוא תשעה וחבור המספרים שלא יעברו תשעה קצת עם קצת היא הידיעה הראשונה לכל בעלי שכל.

כאשר תרצה לחבר מספרים כמה שיהיה ראו שתכתוב כל מספר ומספר מהם בטור אחד ותחלק הטורים לאבנים האבן הראשה תכתוב בה מה שבמספר ההוא מהמעלה הראשונה ואם אין בו מהמעלה הראשונה מאומה תכתוב בה גלגל להורות שאין בזאת המעלה שום מספר והאבן השנית תכתוב בה מה שבמספר ההוא מהמעלה השנית ואם אין בו מהמעלה מאומה תעשה בו גלגל והאבן השלישית תכתוב בה מה שבמספר ההוא מהמעלה השלישית וכזה הדרך עד אין קץ ותעשה הטורים

6) In W. נודע בעצמו, 7) in allen drei Hdschr. המעלה.

המאמר השני.

הצעת המאמר דע כי החכמים המשילו הש׳ יתעלה בעולם השכלים הנפרדים לאחד במספר ואם הוא מקרה לפי שיסוד כל המספר הוא אחד והוא עלת[1] מציאותם והוא ממציאם והוא עם כלם ואיננו ממנינם כי הוא בעצמו איננו מספר כי אם בהתחלקו ואז איננו אחד אם ידומה העדרו יעדרו כלם ואם ידומה העדרם לא יעדר ואין לו מצד המספר קצה ראשון ולא קצה אחרון עם היות לכל המספרים קצה ראשון וקצה אחרון בפנים מה ואם יתואר לאחד קצה מצד המספר לא יהיה זה כי אם בהחלקו ואז[2] איננו אחד ואמרנו מצד המספר כי מצד היותו קו או שטח או גשם יש לו קצות והם בקו הנקודות ובשטח הקוים ובגשם השטחים המקיפים בו אמנם אין זה לו מצד המספר כי הקו לא יתחלק לנקודות ולא יורכב מהם והשטח לא יתחלק לקוים ולא יורכב מהם הנה כל המספרים אב אחד להם ממנו יצאו אליו ישובו כי כאשר יתוספו האחדים עד עשרה ישוב עשרה להיות אחד ויהיו עשרים כשנים ושלשים כשלש וארבעים כארבעה וכזה ימשך הענין עד שיגיע למאה ויהיה הוא אחד ומאתים כשנים ושלש מאות כשלשה וכן ימשך עד שיגיע לאלף והוא ישוב להיות אחד וככה עד אין קץ. הנה התב׳ בזה שכל המספרים כלו אל תשעה והנה האחד ומה שימשך אליו מן האחדים עד תשעה יקרא המעלה הראשונה והעשרה ומה שימשוך עליו מן העשיריות עד תשעים יקרא המעלה השניה והמאה ומה שימשך אליו מן המאות עד תשע מאות[3] יקרא המעלה השלישית והאלף ומה שימשך אליו מן האלפים יקרא המעלה הרביעית ובזה הדרך ימשכו אחדי המעלות מתיחסים עד אין קץ רצוני שכל אחד מהם יחסו אל אחד מהמעלה שלפניו עשרה ואמרנו עד אין קץ לפי שהמספר יתוסף אל מה שיתוסף[4] רצוני שכל מה שתוסיף עליו תוכל להוסיף עוד לא שיהיה שם[5] מספר אין תכלית לו כי מן המבואר באיזה מספר שיהיה שיש לו תכלית ותכליתו הוא האחד אשר בו ישלם סוף דבר אמרנו במספר מה שאין לו תכלית מבואר בנפש המנעו כי אמתת המספר ומהותו היא להודיע תכלית חלקי מה שיקיף בו ועוד כי כל מספר הוא אם זוג ואם נפרד בהכרח וזה תכליתו על כן לא יהיה הענין בהפך רצוני שיתחלק אל מה שיתחלק תמיד כמו שיאמר זה בקו כי היה מן המחויב שנגיע לאחד ושם נעמוד ואולם קרה לאחד המספרי שיתחלק אל מה שיתחלק מצד הנושא כמו שיעשו חכמי התכונה בבואם לדקדק השבון מה יחלקו האחד לששים ויקראו שברים ראשונים וכל אחד מהשברים ההם יחלקו לששים ויקראו שניים וכל אחד מהשניים יחלקו לששים ויקראו שלישיים ובזה הדרך ימשכו אלו השברים מתיחסים עד אין קץ ויסודם ר״ל התחלתם היא המעלה הראשונה רצוני לו׳ האחד ממנה.

---

[1]) In W. ועלת הוא, [2]) וזה in W., [3]) in W. und M. II fehlt מאות, [4]) in M. II שתוסף, [5]) in M. II לא יהיה שם.

והוא מבואר שכל מחברת השאריות מתחלפות ונאמר שאין שם מחברת זולת אלו אשר מנינו ממספר מ מאלו הנושאים שאם היה אפשר תהיה המחברת ההיא גהז ונקח שארית הנושאים והוא אבדו אבל אבדו היא אחת ממחברות ט מאלו הנושאים וכבר לקחנו לכל מחברת מהם את שאריתה ושארית זאת המחברת מחברת גהז אם כן מחברת גהז היא אחת מהמחברות הנמנות וכאשר היה זה כן רצוני שאין שם מחברת זולת אלו אשר מנינו ושכל המחברות אשר מנינו הם מתלפות בנושאיהן א״כ מחברות מ מאלו הנושאים המתחלפות הוא מספר ל והוא מה שרצינו לבאר.

וכבר התבאר זה במופת אחר וזה שאנחנו נניח שיהיה מספר הנושאים מספר ה ויהיו המספרים הנמשכים עד ה מספרי אבגדהוזח ונאמר שמחברות מספר מה מאלו הנושאים המתחלפות בנושאיהן כמספר מחברות שארית המספר הזה ממספר אלו הנושאים ויהיה המספר מספר ג והיה יתרון ה על ג מספר ה ואומר שמחברות ג מאלו הנושאים המתחלפות בנושאיהן הם כמספר מחברות ה מאלו הנושאים המתחלפות בנושאיהן וזה שמחברות מספר ג מאלו הנושאים כמספר מה שימנה מורכב אבג מורכב ווזח[246]) ומחברות מספר ה מאלו הנושאים הם כמספר מה שימנה מורכב אבגדה מורכב דהווזח[247]) ואומר שמורכב אבגדה ימנה מורכב דהווזח כמספר מה שימנה מורכב אבג מורכב ווזח וזה שמורכב אבגדה הוא שוה לשטח ההוה ממורכב דה[248]) במורכב אבג ומורכב דהווזח הוא שוה לשטח ההוה ממורכב דה במורכב ווזח הנה דה הוכו בו שני מורכבי אבג ווזח והיה מזה מורכב אבגדה דהווזח אם כן יחס מורכב אבגדה אל מורכב דהווזח הוא כמו יחס מורכב אבג אל מורכב ווזח א״כ[249]) מורכב אבגדה ימנה מורכב דהווזח כשיעור מה שימנה מורכב אבג מורכב ווזח ולזה יהיה מספר מחברות ג המתחלפות בנושאיהן מאלו הנושאים שוה למספר מחברות ה המתחלפות בנושאיהם מאלו הנושאים.

ובזה התבאר שמחברת איזה מספר שיהיה ממספר מונח מנושאים מתחלפים המתחלפות בנושאיהן שוה למספר מחברות שארית המספר המונח מנושאים מהנושאים ההם ומש״ל.

ובכאן נשלם המאמר הראשון תהלה ל׳ יתברך.

---

[246]) Am Rand מס״ג וס״ד וס״ז, [247]) in W. fehlt bis ווזח, [248]) in W. fehlt bis שוה, [249]) am Rand מי״א.

ס״ח) כאשר[243]) היה מספר מונח מנושאים מתחלפים והיה מספר מחברות מספר מונח שני מאלו הנושאים המתחלפים בנושאיהם כמו מספר מונח שלישי והיה יתרון המספר המונח הראשון על המספר המונח השני מספר מונח רביעי הנה מחברות המספר המונח הרביעי המתחלפות בנושאיהם הם כמו המספר המונח השלישי, ויהיו הנושאים המתחלפים נושאי אבגדהוז והיה מספרם מספר ה והיו מחברות מספר ט מאלו הנושאים המתחלפות בנושאיהם מספר[244]) ל והיה יתרון ה על ט מספר מ ואומר שמחברות מספר מ מאלו הנושאים המתחלפות בנושאיהם הם ג״כ כמו מספר ל ונבאר תחלה שכאשר היו שני מחברות מתחלפות מאלו הנושאים שמחברות שאריתם מאלו הנושאים מתחלפות בנושאיהן גם כן וזה שאנחנו נשים מחברות אבגד אגדה מאלו הנושאים מתחלפות בנושאיהן ואולם שארית מחברות אבגד מאלו הנושאים היא מחברת[245]) הוז ושארית מחברת אגדה היא מחברת בוז ונאמר שמחברות הוז בוז מתחלפות בנושאיהן וזה שאם היה אפשר זולת זה יהיה ה הוא ב ואם היה הענין כן לא תהיינה מחברות אבגד אגדה מתחלפות בנושאיהן וכבר הונחו מתחלפות זה שקר אם כן כבר יהויב שתהיינה מחברות הוז בוז מתחלפות בנושאיהן וכזה התבאר ששארית כל שתי מחברות מתחלפות מהם הם מתחלפות וכאשר התישב זה הנה נבאר שמחברות מספר מ מאלו הנושאים המתחלפות בנושאיהן הם גם כן כמו מספר ל וזה שאנחנו נקח לכל מחברות מספר ט מאלו הנושאים מחברת שארית הנושאים שהוא כמו מספר מ רצוני שארית הנושאים אבל המחברות הראשונות מתחלפות בנושאיהן הנה מחברות שאריתן מתחלפות בנושאיהן ולפי שלקחנו לכל מחברת ט מאלו הנושאים מחברת שאריתה הנה מספר המחברות המתחדשות מהשאריות הוא כמספר המחברות הראשונות ואולם מחברות ט מאלו הנושאים המתחלפות בנושאיהן הם כמו מספר ל אם כן מחברות השאריות שהם מחברות מ מאלו הנושאים הם כמו מספר ל גם כן.

---

243) In W. am Rand: שכאשר לוקחו מנושאים מונחים קצת מהם ונעשו חבורים מתחלפים בנושא יהיה מספרם כמספר החבורים הנעשים מהנושאים ההם מהמספר הנשאר . . . . . תום כל הנושאים כלו תאמר . . . . . הנושאים ה והוברו חבורים . . . . ונודעו מזה שהבור . . . . . . השנים פא . . . . . . לה והשלישיים על מנין, 244) in M. fehlt von מספר bis ג״כ, 245) in W. fehlt היא מחברת,

לבד כמו מספר לׄ וכזה התבאר שמספר המחברות המתחלפות בסדר המתחדשות מכל מחברת ממחברות הׄ מאלו הנושאים המתחלפות בנושאיהם הוא כמו מספר לׄ א״כ מספר אלו המחברות בכללם הם כמספר מחברות הׄ מאלו הנושאים המתחלפות בנושאיהם מוכה על לׄ ואולם מספרם הוא טׄ אם כן מספר אלו המחברות בכללם הוא כמספר שטח טׄ בלׄ ונאמר שאין באלו המחברות שמנינו שתים דומות לפי שבהיות הנושאים אחרים כבר התחלפו המחברות בסדר והיה מספרם מספר לׄ לפי מה שהנחנו ואין ספק שבהיות הנושאים מתחלפים לא תהיינה המחברות דומות ונאמר שאין שם מחברת זולת אלו שמנינו שאם היה אפשר תהיה המחברת ההיא ודבׄ [240]) אבל כל נושאי בדוׄ [241]) התחברו בכל מיני סדורים ואחד ממיני סדורם הוא ודבׄ א״כ מחברות ודבׄ היא אחת מהמחברות אשר מנינו א״כ אין שם מחברת זולת אלו ובהיות הענין כן רצוני שאין באלו המחברות אשר מנינו שתי מחברות דומות ואין שם מחברת זולת אלו אם כן מספר מחברות הׄ המתחלפות אם בסדר אם בנושאיהם מנושאי אבגדהוׄ הוא כמו מספר שטח טׄ בלׄ ומש״ל.

ס״ז) **כאשר היה מספר מונח מנושאים מתחלפים והיה מספר מחברות מספר מונח שני המתחלפות אם בסדר אם בנושאיהם כמו מספר מונח שלישי והיו מחברות המספר המונח השני מנושאים מתחלפים המתחלפות בסדר לבד מספר מונח רביעי הנה מספר מחברות המספר המונח השני ממספר הנושאים המונח המתחלפות בנושאיהם הוא כמספר אחדי מה שימנה המונח הרביעי המונח השלישי.**

ויהיו הנושאים המתחלפים נושאי אׄ בׄ גׄ דׄ הׄ ויהיה מספרם מספר ז [242]) ותהיינה מחברות הׄ מאלו הנושאים המתחלפות אם בסדר אם בנושאיהם מספר טׄ ותהיינה מחברות הנושאים אשר מספרם הׄ המתחלפות בסדר לבד כמו מספר לׄ ונאמר שמספר טׄ ימנהו לׄ כמספר אחדי מחברות הׄ מנושאי אבגדהׄ המתחלפות בנושאיהם המופת שאנחנו נשים מחברות הׄ מאלו הנושאים המתחלפות בנושאיהם כמו מספר מׄ ואולם מחברות הנושאים אשר מספרם הׄ המתחלפות בסדר לבד הם כמספר לׄ והנה מחברות הׄ מאלו הנושאים המתחלפות אם בסדר אם בנושאיהם הם כמו מספר טׄ א״כ מספר טׄ שוה לשטח לׄ במׄ ולזה טׄ ימנהו לׄ כמספר אחדי מׄ והוא מספר מחברות הׄ מאלו לנושאים המתחלפות בנושאיהם ומש״ל.

---

240) Sowohl in W. als in M. II וכׄבׄ, 241) sowohl in W. als in M. II וכׄוׄ,
242) in W. eine durch Randabschneidung unleserliche Note,

מחברות דומות באלו המחברות שמנינו ואין שם מחברת זולת אלו הנה אם כן מחברות מ מאלו הנושאים המתחלפות אם בסדר אם בנושאיהם הוא כמספר שטח נ בל ומש"ל.

ובכאן התבאר שמחברות מספר מונח ראשון ממספר מונח שני מנושאים מתחלפים המתחלפות אם בסדר אם בנושאיהם הוא שוה למספר המורכב ממספרים נמשכים מספרם כמו המספר המונח הראשון ויהיה האחרון המספר השני ויהיה מספר הנושאים מספר ז ויהיו מספרי אבגדהוז נמשכים ומתחילין מן האחד והוא מבואר שמחברות השנים מהם הוא כמספר שטח ו בז ואולם המספרים מספרם שנים והם נמשכים והאחרון מהם הוא ז ומחברות השלשה מהם הוא כמו השטח ההוה מה בשטח ו בז לפי שיתרון ז על שנים הוא ה וזה שוה למורכב הוז ואלו המספרים מספרם שלשה גם כן והם נמשכים והאחרון מהם הוא ז וכזה התבאר שמספר מחברות הארבעה מהם הוא שוה למורכב דהוז וכזה התבאר באיזה מספר שיהיה.

ס"ו) כאשר[237] היה מספר מונח מנושאים מתחלפים והיו מחברות מספר מונח שני מאלו הנושאים המתחלפות בנושאיהם כמו מספר מונח שלישי והיו מחברות המספר המונח השני מנושאים מתחלפים בסדר לבד כמו מספר מונח רביעי הנה מחברות המספר השני מאלו הנושאים המתחלפים אשר מספרם המספר המונח הראשון המתחלפות אם בסדר אם בנושאיהם הם כמספר השטח ההוה מהמספר המונח השלישי במספר המונח הרביעי. ויהיו הנושאים ההם נושאי אבגדהו והיה מספרם ז והיו מחברות מספר ח[238] מהם המתחלפות בנושאיהם כמו מספר ט והיו מחברות הנושאים המתחלפים אשר מספרם ח המתחלפות בסדר לבד כמו מספר ל[239] ואומר שמחברות מספר ח מנושאי אבגדהו המתחלפות אם בסדר אם בנושאיהם הם כמספר שטח ט בל המופת שאנחנו נשים אחת ממחברות ח מאלו ז הנושאים המתחלפות בנושאיהם מחברת בגד ויתחדשו ממנה מחברות מתחלפות בסדר

---

237) In W. am Rand eine undeutliche und durch Randabschneidung ziemlich verstümmelte Bemerkung, 328) in W. am Rand: ר"ל יהיה ח שלשה או ארבעה ויורה שהחבור נעשה מן גג או דד, 239) in W. am Rand: ר"ל יהיה ל כלו תאמ' ששים שהוא הפנים שיתחבר: בו שלשה שלשה נושאים מששה נושאים,

המספר הנמשך אחר המונה השני מאלו הנושאים המתחלפות אם בסדר אם בנושאיהם הם כמספר השטח ההוה מהמספר המונה השלישי ביתרון המספר המונה הראשון על המספר השני, ויהיו הנושאים אבגדהוז[232] ויהיה מספר הנושאים האלה מספר ה ויהיה מספר ט מתחלף למספר ה וקטן ממנו ויהיו מחברות מספר ט מאלו הנושאים המתחלפות אם בסדר אם בנושאיהם כמספר ל ויהיה מ נמשך אחר ט והיה יתרון ה על ט מספר נ ונאמר שמחברות מספר מ מאלו הנושאים המתחלפות אם בסדר אם בנושאיהם הם כמספר שטח ל בנ[233] המופת שאנחנו נשים אחת ממחברות מספר ט מאלו הנושאים מחברת אבג והנה הנושאים הנשארים הם דהוז ומספרם כמספר נ הנה כבר יושם כל אחד מנושאי דהוז הנשארים ראשון עם מחברת אבג ותהיינה המחברות מתחלפות ויהיה מספר נושאי המחברת מספר מ[234] לפי שכבר נוסף על מספר נושאי המחברת הראשונה נושא אחד[235] ולפי שהיה מספר דהוז כמו מספר נ תהיינה המחברות המתחדשות ממחברת אבג כמספר נ וכזה התבאר שמספר המחברות המתחדשות עם כל מחברת ממחברות ט מאלו הנושאים המתחלפות אם בסדר אם בנושאיהם הם כמספר נ ולזה יהיה מספר אלו המחברות בכללם רצוני מספר מחברות מ מאלו הנושאים כמו מספר נ מוכה על מספר מחברות ט מאלו הנושאים אבל מספר מחברות ט מאלו הנושאים הוא ל א״כ מחברות מ מאלו הנושאים כמו מספר שטח נ בל ונאמר שאין בכל אלו המחברות שמנינו שתי מחברות דומות וזה שהמחברת האחת כבר חוברו עמה נושאים מתחלפים כפעם בפעם ולזה יחויב שתהיינה המחברות ההם מתחלפות ואין ספק שהמחברות המתחלפות לא תהיינה דומות עם איזה נושא שיחוברו הנה אם כן אין באלו המחברות שתי מחברות דומות ונאמר שאין שם מחברת זולת אלו אשר מנינו שאם היה אפשר תהיה המחברת ההיא מחברת ודבז אבל מחברת דבז[236] כבר הושם כל אחד מהנושאים הנשארים ראשון עמה ואחד מהנושאים ההם הוא ו אם כן מחברת ודבז היא אחת מהמחברות אשר מנינו ואחר שאין שם שתי

---

[232] Sowohl in W. als in M. II nur אבגדהו, [233] in W. am Rand: כלומר שנניה שיהיו החבורים מן ג׳ מספרים, [234] in W. am Rand: למה שקדם שאם נוסף על מחברות אחרו׳ בעינם נושא אחד היה החבור מתחלף, [235] in W. am Rand: כי כ׳ היה מה שיוסיפו נושאי אב שהם כמספר ט על נושאי אבגדה שהם כמספר ה, [236] in W. am Rand: כי דבז שהיתה מג׳ נושאים כבר נמנתה בחבורים הראשונים משלשה נושאים.

ומחברות השלישה הם כמו השטח ההוה משלישה בשנים וזה ישוה למורכב אבג וכזה התבאר לאין תכלית.

ס"ד) מספר [229]) מחברות השנים המתחלפות אם בסדר אם בנושאיהם במספר מונח מנושאים מתחלפים הוא שוה לשטח ההוה מהמספר המונח במספר הנמשך לו לפניו.

ויהיו הנושאים אבגדה ויהיה מספרם מספר ז והמספר הנמשך לז לפניו הוא ה ונאמר שמחברות השנים המתחלפים אם בסדר אם בנושאיהם מנושאי אבגדה הם כמספר שטח ז בה המופת שכבר יושם א ראשון ויתחבר עם כל אחד מהנשארים אשר מספרם מספר ה א"כ המחברות המתחלפות בהיות א ראשון הם כמספר ה וכזה התבאר שכל אחד מאלו הנושאים יושם ראשון ותהיינה המחברות המתחדשות בהיותו ראשון כמספר ה יהיה אם כן מספר אלו המתחברות בכללם כמו מספר ה מוכה על מספר אלו הנושאים ואולם מספר אלו הנושאים הוא מספר ז תהיינה א"כ אלו המחברות כמספר שטח ז בה ונאמר שאין באלו המחברות אשר מנינו שתי מתחברות דומות שלא תתחלפנה אם בסדר אם בנושאיהם וזה כי בהיות האחד מהם ראשון אין שם שתי מחברות דומות לפי שהנושאים אשר התחבר עמהם הם מתחלפים ואין ספק שלא תהיינה דומות אם לא יהיה הנושא הראשון אחד בשניהם כי לכל הפחות יתחלפו בסדר א"כ אין באלו המחברות שתים דומות ונאמר שאין שם מחברת זולת אלו אשר מנינו שאם היה אפשר זה נניח שתהיה המחברת ההוא גה ואולם ג התחבר עם כל אחד מהנשארים ואחד מהנשארים הוא ה אם כן אחת המחברות אשר מנינו היא גה אם כן אין שם מחברת זולת אלו אשר מנינו וכבר התבאר שאין באלו המחברות שתי מחברות דומות א"כ מספר אלו המחברות הוא כמו מספר שטח ז בה ומש"ל.

ס"ה) כאשר [230]) היה מספר מונח [231]) מנושאים מתחלפים והיה מספר מחברות מספר מונח שני מאותם הנושאים מתחלף למספר המונח הראשון וקטן ממנו המתחלפות אם בסדר אם בנושאיהם מספר מונח שלישי הנה מספר מחברות

229) In W. am Rand: ירצה שכשיחובר א עם ב וב עם א יתהלפו בסדר לבד אבל כשיחובר א עם ג וא עם ד ובמה שאחריו יהיו החבורים ההם מתחלפים בסדר ובנושאיהם, 230) in W. am Rand: כמות שהיו הנושאים בכללם ה והם אבגדה זה ונחברו שלשה שלשה בפעם שנית ובפעם ראשונה נחברו ארבעה ארבעה כמו אבגד אבגה אגהו אגהז כי הנושאים אחרים בעינם לא שבפעם א נחברו דד ובפעם שנית נחברו גג מהם כמו אבג אבד אבה, 231) in W. fehlt מונה.

הנמשך אחר המספר המונח, ויהיו הנושאים אבגדה ומספרם ז ויהיה המספר הנמשך אחר ז מספר ה והיה מספר מחברות נושאי אבגדה המתחלפות בסדר לבד מספר ט ויהיו נושאי אבגדהו מוסיפים נושא אחד על מספר נושאי אבגדה ולזה יהיה מספרם מספר ה ונאמר שמספר מחברות נושאי אבגדהו המתחלפות בסדר לבד הוא כמספר שטח ט בח המופת שכבר יחובר ו[222]) ויושת ראשון עם כל אחת ממחברות אבגדה המתחלפות בסדר[223]) ותשארנה המחברות מתחלפות בסרר ולזה תהיינה המחברות בהיות ו ראשון מספר ט וג"כ[224]) הנה מפני שמחברות אבגדה המתחלפות בסדר לבד הם כמספר ט תהיינה מחברות אבגדו ג"כ מספר ט וכבר[225]) יהובר ה ויושם ראשון עם כל אחת מאלו המחברות ותשארנה המחברות מתחלפות בסדר לבד ולזה תהיינה המחברות בהיות ה ראשון כמספר ט וכזה התבאר שכל אחד מאלו הנושאים יושם ראשון ותהיינה המחברות המתחלפות בסדר לבד בהיותו ראשון כמספר ט תהיינה אם כן אלו המחברות בכללם[226]) כמו ט מוכה על מספרם ואולם מספרם הוא ה אם כן מספר מחברות אבגדהו המתחלפות בסדר לבד הם כמספר שטח ה בט והוא מבואר שאין בכל אלו המחברות שמנינו שתים דומות כי בהיות אחד מהנושאים ראשון אין שם שתי מחברות דומות כי המחברות אשר יתחבר עמהם הם מתחלפות וכן תתחלפנה בהתחברו עמהם ואין ספק שכאשר לא היה הנושא הראשון אחד שהמחברות מתחלפות בסדר ובהיות הענין כן הוא מבואר שאין באלו המחברות שמנינו שתי מחברות דומות ונאמר ג"כ שאין שם מחברת זולת אלו שאם היה אפשר תהיה המחברת ההיא דוהגאב[227]) אבל ד התחבר עם הנשארים בכל מיני חבור ואחת ממחברות הנשארים ו ה ג א ב אם כן דוהגאב הוא אחת מהמחברות שמנינו ואחר שכן הוא רצוני שאין באלו המחברות שתים דומות ואין שם מחברת זולת אלו הנה אם כן מספר מחברות אבגדהו המתחלפות בסדר לבד הוא כמו שטח ט בה ומש"ל.

ובכאן התבאר שמספר מחברות נושאים מה המתחלפות בסדר לבד הוא כמספר המורכב ממספרים נמשכים מתחילים מן האחד מספרם כמספר הנושאים ההם וזה שמחברות שנים הם שנים[228]) וזה שוה למספר המורכב מאחד ושנים

---

[222]) In W. ו עם, [223]) in M. II fehlt bis ולזה, in W. המתחלפות, [224]) die Worte וג"כ bis ט sind offenbar eingeschoben, [225]) in W. וכאשר, [226]) in M. II בעולם, [227]) in W. בוהגא in M. II בוהגאב, muss heissen דוהגאב, [228]) in W. am Rand: כי אב יחוברו בשני פנים רצוני אב בא.

הקדמה.

שני נושאים[216]) יתחלפו בסדר בחבורם בשני דרכים אם שיקדים האחד לאחר או שיקדים האחר לו.

החלוף[217]) בחבורי הנושאים הוא בשני דרכים אם שיתחלפו בנושאיהם וישתתפו בכמות מספרם או שיתחלפו בסדר לבד.

חבור הנושאים המתחלף חלוף מה להבור נושאים אחד כשחובר עוד עם כל אחד מהם נושא אחד בעינו הנה הם מתחלפים ג״כ.

והמשל[218]) שיהיה חבור אבג מתחלף לחבור בגד בנושאים וחובר עם כל אחד מהחבורים ה והיו החבורים ה אבג ה בגד הנה הם מתחלפים בהם גם כן כמו החלוף הקודם וכן הענין אם היו החבורים מתחלפים רק בסדר לבד וזה שאם חובר ה עם כל אחד מחבורי אבג באג ונשאר סדרם כמו שהיה והיו החבורים ה אבג ה באג הנה הם מתחלפים ג״כ כמו החלוף הקודם.

מספר החבורים ההוים ממספר[219]) מונח מנושאים מה שוה למספר החבורים ההוים מהמספר המונח מנושאים אחרים כשהיו החבורים על דמיון הקודמים רצוני ל׳ שאם היו החבורים הקודמים מתחלפים בנושאיהם יהיו החבורים האחרים מתחלפים בנושאיהם ואם היו החבורים הקודמים מתחלפים בסדר יהיו החבורים האחרים מתחלפים בסדר לבד.

כאשר חוברו עם חבור נושאים מונח נושאים מתחלפים הנה החבורים מתחלפים בנושאיהם[220]) משל זה שהבור אבג התחבר עם ד והיה ד אבג ועם ה והיה ה אבג הנה חבורי דאבג האבג מתחלפים בנושאיהם.

ס״ג) כאשר[221]) היו מחברות מספר מונח מנושאים מתחלפים המתחלפות בסדר לבד מספר מה הנה מחברות המספר הנמשך אחר המונח מנושאים מתחלפים המתחלפות בסדר לבד הם כמו שטח מספר המחברות הקודמות במספר

---

216) In M. II הנושאים in W. am Rand: ר״ל שבהויות הנושאים שנים החלוף ביניהם בסדר אפשר על שני פנים לבד כמו נח הן וכמו אב בא והיא הצעה לסוף תמונה ס״ג, 217) in W. am Rand: כמו אבג אגד אדה חמתחלפים בנושא ומסכימים בכמות המספר שכל חבור מהם מחובר מג׳ נושאים או שיתחלפו בסדר לבד כמו אבג אגב בגא באג, 218) in W. am Rand: רצה בזה שלפי שהם מתחלפים בקצת הנושאים או מסכימים בכל הנושאים ומתחלפים בסדר לבד אף שחובר עליהם נושא אחד בעינו הנה יקרא׳ מתחלפים כמו החלוף הראשון, 219) in W. fehlt von מספר bis zum nächsten ההוים, 220) in W. am Rand: רצ״ל שאף שהיו מסכימים ראשונה בנושא והסדר הנה לפי שהתחבר עמהם נושאים מתחלפים, יקרא כלל החבור המורכב מתחלף מפני הנושא האחד האחרון המתחלף 221) in W. am Rand: ם המתחלפות בסדר לבד כמו מחברות אגבד אדבג בגאד וזולתם.

על מספר ד̇ כמו שלשת דמיוני שטח ג̇ באב̇ מקובצים וכמו מספר ז̇ המופת שאב̇ הוכה על עצמו והיה שוה למרובעי מספרי אב̇ ולכפל שטח א̇ בב̇ אם כן מרובע אב̇ מקובצים שוה למרובעי אב̇ ולכפל מספר ג̇ וכבר הוכה מרובעי אב̇ וכפל מספר ג̇ על אב̇ מקובצים והיה ה̇ לפי שמרובע אב̇ מקובצים יוכה על אב̇ מקובצים ויהיה ה̇ ואומר שמספר ה̇ מוסיף על מספר ד̇ כמו שלשה דמיוני שטח ג̇ באב̇[212]) מקובצים וכמו מספר ז̇ וזה שמרובע א̇ כבר הוכה באב̇ ויהיה העולה שוה לשטח א̇ במרובע א̇ שהוא מספר ד̇ ולשטח ההוה ממרובע א̇ במספר ב̇ וג״כ הנה מרובע ב̇ כבר הוכה באב̇ והיה העולה שוה לשטח ההוה ממרובע ב̇ בב̇ שהוא מספר ז̇ ולשטח ההוה ממרובע ב̇ במספר א̇ אם כן מרובעי אב̇ כאשר הוכו על אב̇ היה העולה שוה למספר ד̇ ולמספר ז̇ ולשטח מרובע א̇ במספר ב̇ ולשטח מרובע ב̇ במספר א̇ אבל[213]) שטח מרובע א̇ במספר ב̇ עם שטח מרובע ב̇ במספר א̇ שוה לשטח ג̇ באב̇ אם כן מרובעי אב̇ כאשר הוכו על אב̇ היה העולה שוה למספר ד̇ ולמספר ז̇ ולשטח ג̇ באב̇ ואולם מספר ג̇ כאשר הוכה באב̇ היה העולה שטח ג̇ באב̇ אם כן כפל ג̇ כאשר הוכה באב̇ היה העולה שני דמיוני שטח ג̇ באב̇ אבל כאשר הוכו מרובעי מספרי אב̇ על אב̇ היה העולה שוה למספר ד̇ ולמספר ז̇ ולשטח ג̇ באב̇ אם כן כאשר הוכו מרובעי מספרי אב̇ וכפל מספר ג̇ על אב̇ היה העולה שוה למספר ד̇ ולמספר ז̇ ולשלשת דמיוני שטח ג̇ באב̇ אבל מרובעי מספרי אב̇ וכפל מספר ג̇ כאשר הוכו על אב̇ היה העולה ה̇ א״כ מספר ה̇ שוה למספר ד̇ ולמספר ז̇ ולשלשת דמיוני שטח ג̇ באב̇ א״כ מספר ה̇ מוסיף על מספר ד̇ כמו שלשת דמיוני שטח ג̇ באב̇ מקובצים וכמו מספר ז̇[214]) ומש״ל.

וכבר[215]) יתבאר מזאת התמונה בעצמה שמעוקב אב̇ שוה למספר ד̇ ולמספר ז̇ ולשלשת דמיוני שטח מרובע א̇ בב̇ ולשלשת דמיוני שטח מרובע ב̇ בא̇ וזה שמעוקב אב̇ שוה למספר ד̇ ולמספר ז̇ ולשלשת דמיוני שטח ג̇ באב̇ אבל שטח ג̇ באב̇ שוה לשטח מרובע א̇ בב̇ ולשטח מרובע ב̇ בא̇ א״כ שלשת דמיוני שטח ג̇ באב̇ שוים לשלשת דמיוני שטח מרובע א̇ בב̇ ולשלשת דמיוני שטח מרובע ב̇ בא̇ א״כ מעוקב אב̇ שוה למספר א̇ ולמספר ד̇ ולשלשת דמיוני שטח מרובע א̇ בב̇ ולשלשת דמיוני שטח מרובע ב̇ בא̇ ומש״ל.

---

212) In W. בא̇, 213) in M. II am Rand משלפניה, 214) in W. ג̇, 215) in W. am Rand משלפניה.

ד מורכב ממספרי אאא בבב גגג א"כ מספר ד שוה לשטח ההוה ממורכב מספרי אבג על מורכב מספרי אבג אבג אבל מורכב מספרי אבג אבג שוה לשטח ההוה ממורכב מספרי אבג על מורכב מספרי אבג שהוא כמו מרובע המספר המורכב ממספרי אבג[208]) א"כ מספר ד שוה לשטח ההוה ממורכב מספרי אבג על מרובע מורכב מספרי אבג ולזה יהיה מספר ד שוה לשטח ההוה ממספר ה על מרובע מספר ה א"כ מעוקב מספר ה שוה למספר ד ומש"ל[209]).

ס"א) **כאשר חובר השטח ההוה ממספר מונח במרובע מספר מונח שני עם השטח ההוה מהמונח השני במרובע המספר המונח הראשון הנה העולה שוה לשטח העולה משטח אחד מהמספרים המונחים באחר על מקובץ המספרים המונחים,** ויהיו המספרים המונחים מספרי אב והיה מרובע מספר א מספר ג ומרובע מספר ב מספר ד וחובר שטח א בד עם שטח ב בג והיה ה והיה שטח א בב מספר ז ואומר שמספר ה[210]) שוה לשטח ההוה ממספר ז במספרי אב מקובצים המופת ששטח א בד מורכב ממספרי א ב ב לפי שמספר ד הוא מרובע ב א"כ שטח א בד שוה לשטח ההוה ממורכב מספרי אב בב וכבר היה מורכב אב מספר ז א"כ שטח א בד שוה לשטח ז בב וכזה התבאר ששטח ב בג שוה לשטח ההוה ממורכב אב במספר א א"כ שטח ב בג שוה לשטח ז בא א"כ שטח א בב עם שטח ב בג שוים לשטח ז בא מחובר עם שטח ז בב אבל שטח ז בא מחובר עם שטח ז בב שוה לשטח ההוה ממספר ז במספרי אב מקובצים אם כן שטח א בד עם שטח ב בג שוה לשטח ז באב מקובצים ומש"ל.

ס"ב) **כאשר היו שני מספרים מונחים הנה המעוקב ההוה ממקובצם מוסיף על המעוקב ההוה מהמספר הראשון מהם כמו שלשה דמיוני השטח ההוה משטח המספר הראשון המונח בשני על מקובצם[211]) וכמו מעוקב המספר השני,** ויהיו המספרים המונחים מספרי א ב והיה שטח א בב מספר ג והיה מעוקב א מספר ד ומעוקב אב מקובצים מספר ה ומעוקב ב מספר ז ואומר שמספר ה מוסיף

---

[208]) In W. am Rand: זה כי המעוקב יתחדש מהכאת השורש בעצמו עוד (?) השורש העולה במרובע, [209]) in W. folgten hier 2 Sätze, nicht numeriert, nach dem ersten sind die Worte eingefügt: וזאת התמונה והנמשכת לה נמצא בספר אחר, [210]) ה fehlt in M. II, [211]) in W. המקובצים.

מספרי אב הנה נשים המספר הנמשך למספר א לאחריו מספר ג ונשימהו המספר הראשון ונשים המספר הנמשך למספר ב לאחריו מספר ד ונשימהו המספר השני ונכה א בב ונגרע מהעולה אחד ונשים הנשאר ממנו מספר ז ונשימהו המספר השלישי ונאמר שמספרי גדז הם המבוקשים רצינו שגז מקובצים ימנם ד כמספר אחדי א[204]) ודז מקובצים ימנם ג כמספר אחדי ב המופת שז פחות אחד משטח א בב וג שוה לאחד ולא א״כ מספרי גז שוים לשטח א בב ולא אבל שטח א בב כשחובר עם א שוה לשטח א בד אם כן מספרי גז שוים לשטח א בד ולזה ימנם ד כמספר אחדי א וגם כן מפני שז פחות אחד משטח א בב וד שוה לאחד ולב יהיו מספרי דז שוים לשטח א בב ולב אבל שטח א בב כשחובר עם ב הוא שוה לשטח ג בב א״כ מספרי דז[205]) שוים לשטח ג בב אבל שטח ג בב ימנהו ג כמספר אחדי ב א״כ מספרי דז ימנם ג כמספר אחדי ב הנה א״כ מספרי גז ימנם ד כמספר אחדי א ומספרי גז ימנם ג כמספר אחדי ב ומש״ל.

ג״ט) **המספר המורכב מהמרובעים ההוים ממספרים מונחים שוה למרובע ההוה מהמספר המורכב מהמספרים המונחים ההם**, ויהיו המספרים המונחים אבג ויהיה המספר המורכב ממרובעי מספרי א ב ג מספר ד ויהיה המספר המורכב ממספרי א ב ג מספר ה ואומר שמספר ד שוה למרובע ההוה ממספר ה המופת כי מפני שכל מספר מרובע מורכב משני דמיוני יסודו הנה יהיה מספר ד מורכב ממספרי[206]) אא בב גג ויתבאר לפי מה שקדם ששטח המספר המורכב ממספרי אבג במורכב ממספרי אבג הוא מספר ד א״כ המספר המורכב ממספרי א ב ג והוא ה הוכה על עצמו והיה ד א״כ מספר ד שוה למרובע ההוה ממספר ה ומש״ל.

ס׳) **המספר המורכב ממעוקבי מספרים מונחים שוה למעוקב ההוה מהמספר המורכב מהמספרים המונחים ההם**, ויהיו המספרים המונחים מספרי א ב ג ויהיה המורכב ממעוקבי מספרי א ב ג מספר ד ויהיה המספר המורכב ממספרי אבג מספר ה ואומר שמספר ד שוה למעוקב ההוה ממספר ה המופת[207]) מפני שכל מעוקב מורכב משלשה דמיוני יסודו יהיה מספר

---

204) In M. II ה׳ וח׳, in W. גדז, 205) in W. בז, 206) in W. am Rand: לפי שנשה.בה היסוד ביסוד עלה המרובע, 207) in W. am Rand: לפי שהכפלת אבג באבג שוה להכפלת א בא וב בב וג בג שהם מרובעי א יב וג.

מג במספר כ מספר ל והוא מבואר שיחס חלק מא וב חלקים מג במספר ז [201]) אל חלק מא וב חלקים מג במספר כ הוא כיחס מספר ז אל מספר כ א״כ יחס ט אל ל הוא כיחס ז אל כ א״כ יחס ט אל ה ואל ל אחד א״כ ה שוה לל הנה אם כן חלק מא וב חלקים מג במספר כ שוה לד חלקים מה במספר המונח והוא מה שרצינו לבאר.

נ״ז) **נרצה שנמצא שני מספרים יהיה האחד עם חלק מה מהשני כמו האחר עם חלק אחר מהמספר הראשון,** הנה יהיו המספרים אשר בהם נקראים החלקים האלה מספרי א ב ונרצה שנמצא שני מספרים יהיה האחד עם חלק מא מהאחר כמו המספר השני עם חלק מב מהמספר הראשון הנה נשים המספר הנמשך למספר א לפניו מספר ג והמספר הנמשך למספר ב לפניו מספר ד ונקח שטח ג בב ונשימהו ה והוא יהיה המספר הראשון ונקח שטח ד בה ונשימהו ז והוא יהיה המספר השני ונאמר שמספר ה עם חלק מא מז שוה למספר ז עם חלק מב במספר ה המופת שחלק מא בז הוא ד מפני שא הוכה בד והיה ז וחלק מב מה הוא ג מפני שב הוכה בג והיה ה אם כן מספר ה עם חלק מא מז שוה לשטח ג בב ולמספר ד אבל שטח ג בב כשחובר עם ב שוה לשטח א בב א״כ שטח א בב מוסיף אחד על שטח ג בב עם מספר ד לפי שב מוסיף על ד אחד א״כ שטח א בב מוסיף אחד על מספר ה עם חלק מא מז וג״כ הנה מספר ז עם חלק מב במספר ה שוה לשטח ד בא ולמספר ג אבל שטח ד בא כשחובר עם א שוה לשטח א בב א״כ שטח א בב מוסיף אחד על שטח ד בא עם מספר ג לפי שמספר א מוסיף על ג אחד א״כ [202]) שטח א בב מוסיף אחד על מספר ז עם חלק מב במספר ה וכבר היה ג״כ שטח א בב מוסיף אחד על מספר ה עם חלק מא במספר ז א״כ [203]) מספר ה עם חלק מא במספר ז שוה למספר ז עם חלק מב במספר ה ומש״ל.

נ״ח) **נרצה שנמצא שלשה מספרים יהיה המספר הראשון כשחובר עם השלישי ימנהו השני כמספר אחדי מספר מונח ויהיה המספר השני כשחובר עם השלישי ימנהו הראשון כשיעור אחדי מספר מונח שני,** ויהיו המספרים המונחים

---

[201]) In W. כ, [202]) in M. II fehlt von א״כ bis ה, [203]) in W. fehlt von א״כ bis ז.

במספרים הנשארים המופת כי[197]) מפני שנקבין ג חלקים מד ואחד מה יותר גדול מנקבין ז חלקים מה הנה כבר אפשר שימצא מספר יוסיפו ג חלקים מד ואחד מה בו על ז חלקים מה בו כמו מספר ט ונשים המספר ההוא מספר כ ונאמר שמספר כ הוא המבוקש המופת שאנחנו נשים ז חלקים מה במספר כ מספר ל יהיה א״כ ג חלקים מד במספר כ ואחד מה בו שוה למספר לט מפני שג חלקים מד ואחד מה במספר כ מוסיפים ט על ז חלקים מה בו ונשים מספר א עם ג חלקים מד ואחד מה במספר ב שוה למספר מ אם כן מספר ב עם ז חלקים מה במספר א שוה למספרי מט וכאשר התישב זה כלו הנה נבאר שמספר א עם ג חלקים מד ואחד מה במספרי כב שוה למספר ב עם ז חלקים מה במספרי אכ וזה שמספר א עם ג חלקים מד ואחד מה במספר ב שוה למ ואולם ג חלקים מד ואחד מה[198]) במספר כ שוה למספרי לט א״כ מספר א עם ג חלקים מד ואחד מה במספרי כב שוים למספרי מלט ונ״כ הנה מספר ב עם ז חלקים מה במספר א שוה למספרי מט ואולם ז חלקים מה[199]) במספר כ שוה למספר ל הנה אם כן מספר ב עם ז חלקים מה במספרי אכ שוה למספרי מלט וכבר היה מספר א עם ג חלקים מד ואחד מה במספרי כב שוה למספרי מלט אם כן מספר א עם ג חלקים מד ואחד מה במספרי בכ שוה למספר ב עם ז חלקים מה במספרי אכ ומש״ל.

ג״ו) נרצה שנמצא מספר מה יהיה חלק מה או נקבין חלקים מה ממנו שוה לחלק מה או לנקבין חלקים מה מתחלף לחלק הראשון או לנקבין החלקים הראשון ויהיה לקוח ממספר מה, המשל שאנחנו נרצה שנמצא מספר יהיה חלק מא בו וב חלקים מג בו שוה לד חלקים מה במספר ז המונח הנה נשים ד חלקים מה במספר ז מספר ה ונשים חלק מא וב חלקים מג במספר ז מספר ט[200]) ונשים יחס ז אל כ כיחס ט אל ה ואומר שמספר כ הוא המבוקש המופת שאנחנו נשים חלק מא וב חלקים

---

[197]) Am Rand in W. משלפניה, [198]) in M. II fehlt von hier bis במספרי, [199]) in M. II מז, [200]) in W. ist hier in den Text zwischen die Worte במספר ז und מספר ט noch eingeschoben: תוכל לעשותו באופן אחר יותר נקל והוא שתקח המספר המורכב מהמספרים הקוראים לנקבין החלקים הראשון ויהיה המספר ס כי ימצאו בו אלו החלקים ונשים חלק מא וב חלקים מג במספר ס מספר ט ונשים ס אל כ כיחס ט אל ה ונאמר שמספר כ היא המבוקש ותיכל לעשות עליו המופת אם תקח ס תמורת ז.

חלקים מא במספר ל אל ב חלקים מא במספר ר הוא כיחס ל אל ר על התמורה א״כ יחס נ[190]) אל ש כיחס ל אל ר וכזה יתבאר שיחס ס[191]) אל ת הוא כיחס ל אל ר ושיחס ע אל ו הוא כיחס ל אל ר וכאשר קבצנו היה יחס מספרי נסע מקובצים אל מספרי שתו מקובצים הוא כיחס ל אל ר וכזה[192]) התבאר שיחס מספרי פין[193]) מקובצים אל מספרי יך מקובצים הוא כיחס ל אל ר הנה אם כן יחס מספרי נסע אל מספרי שתו כיחס מספרי פין אל מספרי יך וכאשר המירונו הנה יחס מספרי נסע אל מספרי פין כיחס מספרי שתו אל מספרי יך אבל מספרי נסע מוסיפים על מספרי פין א״כ מספרי שתו[194]) מוסיפים על מספרי יך ונשים יתרון מספרי שתו על מספרי יך מספר ף ולפי שיהיה יחס נסע אל שתו כיחס ל אל ר ויחס פין אל יך הוא ג״כ כיחס ל אל ר הנה כאשר הבדלנו יהיה יחס ק אל ף[195]) כיחס ל אל ר א״כ יחס ק אל מ ואל ף אחד א״כ מספרי ף מ שוים וכבר היו מספרי שתו מוסיפים על מספרי יך מספר ף א״כ מספרי שתו מוסיפים על מספרי יך מספר מ הנה כבר מצאנו מספר והוא ר וב חלקים מא בו עם ג חלקים מד בו ואחד מה בו מוסיפים מספר מ על ז חלקים מה בו וט חלקים מכ בו והוא מש״ל.

נ״ה) כאשר היה מספר מה מונח עם חלק גדול או נקבין חלקים גדול ממספר מונח שני פחות מספר מה[196]) מהמספר השני עם חלק קטן או נקבין חלקים קטן מהמספר הראשון הנה כבר אפשר שימצא מספר שלישי יהיה המספר הראשון המונח עם החלק הגדול או נקבין החלקים הגדול משני המספרים הנשארים שוה למספר השני המונח עם החלק הקטן או נקבין החלקים הקטן משני המספרים הנשארים.

ויהיה המספר הראשון המונח מספר א והמספר השני מספר ב ויהיה נקבין החלקים הגדול ג חלקים מד ואחד מה ונקבין החלקים הקטן ז חלקים מה והיה מספר א עם ג חלקים מד במספר ב ואחד מה ממנו פחות ממספר ב עם ז חלקים מה במספר א כמו מספר ט ונאמר שכבר אפשר שימצא מספר שלישי יהיה מספר א עם ג חלקים מד ואחד מה בשני הנשארים שוה למספר ב עם ז חלקים מה

---

[190]) In M. II יחס נל אל ש כיחס נ אל ר, [191]) in W. כ, [192]) in M. II fehlt bis הנה אם כן, [193]) in W. פת, [194]) in W. am Rand מההקדמה, [195]) in M. II אל ה, [196]) in W. fehlt מספר מה.

ד בל ולכפל מספר ל אבל שני שטחי ד בל וכפל מספר ל שוה לשני שטחי ה בל וכאשר חובר זה עם כפל שטח ה בל יהיה העולה שוה לשני שטחי ה בל ולשני שטחי ה בל וזה כבר התבאר שהוא שוה לכפל שטח ט בל אם כן מספרי סצ מקובצים שוים למספרי נפ מקובצים הנה כבר מצאנו שלשה מספרים והראשון והוא מ עם חלק מא מהנשארים הוא כמו השני והוא נ עם חלק מב מהנשארים וכמו השלישי והוא ס עם חלק מג מהנשארים והוא מש״ל.

נ״ד) **נרצה שנמצא מספר יוסיף חלק מה ממנו או נקבץ חלקים מה ממנו מספר מונח על חלק אחר ממנו או נקבץ חלקים ממנו יותר קטן מן החלק הראשון או מנקבץ החלקים הראשון**, ויהיו החלקים אשר מקובצם יותר גדול ב חלקים מא במספר הדרוש וג חלקים מד בו ואחד מה[183]) בו והחלקים אשר מקובצם יותר קטן ז חלקים מח[184]) במספר הדרוש וט חלקים מכ בו ורצינו שנמצא מספר יהיו החלקים הראשונים ממנו מוסיפים על החלקים השניים אשר מקובצם[185]) יותר קטן מספר מ ויהיה המספר הקטן[186]) שימנוהו כל אלו המספרים הקוראים לחלקים האלו בכללם והם א ד ה ח כ מספר ל ויהיו ב חלקים מא בו מספר נ וג חלקים מד מספר ס ואחד מה בו מספר ע וכזה יהיה מקובץ החלקים המוסיפים מספרי נ ס ע מקובצים ויהיו ז חלקים מח במספר ל מספר פ וט חלקים מכ בו מספר צ וכזה יהיה מקובץ החלקים היותר קטן מספרי פ צ מקובצים ויהיה יתרון[187]) נ ס ע מקובצים על פ צ מקובצים מספר ק ונשים יחס ל אל ר כיחס ק אל מ ונאמר שמספר ר הוא המבוקש[188]) המופת שאנחנו נשים ב חלקים מא במספר ר מספר ש וג חלקים מד בו מספר ת ואחד מה בו מספר ו וכזה יהיה מקובץ אלו החלקים מספרי שתו ויהיה גם כן ז חלקים מח במספר ר מספר י וט חלקים מכ בו מספר ך[189]) וכזה יהיה מקובץ אלו החלקים יך והוא מבואר שיחס ב חלקים מא במספר ל אל מספר ל כיחס ב חלקים מא במספר ר אל מספר ר לפי שיחס כל אחד מאלו החלקים הוא כיחס ב חלקים מא במספר א אל מספר א ולזה יתבאר שיחס ב

---

183) In M. II מז, 184) in M. II וז חלקים מז, 185) in M II נקבצים, 186) in W. קטן מספר, 187) in W. ויהיה יתרון גדול מחלק, am Rand: מההקדמה והוא אמרו החלק או נקבץ החלקים die Worte גדול מחלק sind in den Text gekommen, 188) in W. in Text: בזאת התמונה יחלק א האחד מצד הנושא כמו שיעד לנו בהקדמה והוא אמרו יקרה לאחד החלוקה מצד הנושא,
189) in M. II כ in W. ך.

ישטח ט בל על שטח ה בל הוא שטח ה בל ונאמר שקד שוים לל וזה שמספר ק שוה להז ולאחד אבל מספרי הזא שוים לג יהיה אם כן קא מוסיף על ג אחד אם כן קה שוה לג ולזה יהיה קה מוסיף על ל אחד אם כן קד שוה לל וכאשר התבאר זה הנה התבאר שכפל ישטח ט בל שוה לכפל שטח ה בל ולשני שטחי ד בג[173]) ולכפל מספר ק וזה ששטח ד בל עם ד שוה לשטח ד בג א״כ שני שטחי ד[174]) בג שוים לשני שטחי ד בל ולכפל ד א״כ שני שטחי ד בג וכפל מספר ק שוים לשני שטחי ד בל ולכפל[175]) דק שהוא כמו כפל ל אבל שני שטחי ד בל כאשר חובר עמהם כפל ל שוים לכפל שטח ה בל א״כ[176]) כפל ד בג עם כפל מספר ק שוה לכפל שטח ה בל וכאשר חובר עם זה כפל שטח ה בל היה העולה שוה לכפל שטח ה בל ולכפל שטח ה[177]) בל אבל כפל שטח ה בל עם כפל שטח ה בל שוה לכפל שטח ט בל א״כ מספרי מע מקובצים שוים למספרי נפ מקובצים וגם כן הנה מספרי סצ שוים למספר מ ולשני שטחי ה בל ולשני שטחי ז בה ולשני שטחי ז בב ולכפל מספר ר ומספרי מע שוים למספר מ ולכפל שטח ט בל ונשליך מספר מ המשותף ונאמר ששני שטחי ה בל ושני שטחי ז בה[178]) ושני שטחי ד בב וכפל מספר ר[179]) שוים לכפל שטח ט בל וזה לפי שר מוסיף על ה[180]) אחד יהיה זר מוסיף על זה אחד א״כ זר שוה לק וכבר התבאר שיתרון שטח ט בל על שטח ה בל הוא שטח ה בל וכאשר התישב זה כלו הנה נבאר ששני שטחי ז בה עם שני שטחי ד בב וכפל מספר ר שוה לכפל שטח ה בל וזה ששטח ז בד עם ז שוה לשטח ה בז א״כ שני שטחי ז בה שוים לשני שטחי ד בז ולכפל מספר ז וג״כ הנה שטח ד בב שוה לשטח ד בט ולמספר ד א״כ שני שטחי ד בב שוים לשני שטחי ד בט ולכפל מספר ד א״כ שני שטחי ז בה עם שני שטחי ד[181]) בב וכפל מספר ד שוה לשני שטחי ד בזט מקובצים ולכפל מספרי זרד ולפי שזב מקובצים שוים לג יהיו זט שוים לל ולפי שמספרי זר שוים למספר ק יהיו מספרי זרד שוים לקד אבל קד שוה לל א״כ[182]) שני שטחי ז בה עם שני שטחי ד בב וכפל מספר ר שוה לשני שטחי

---

[173]) In W. ולמספר ק, [174]) in W. לד בג, [175]) die Reihe א״כ bis ולכפל דק in W. 3 mal, zweimal statt דק nur ד, [176]) in W. א״כ נכפל (!) ד בג שטח ה בל א״כ כפל ד בג עם כפל מספר ק, [177]) in M. II ה בל, [178]) in M. II ז בז, [179]) in M. II ד, [180]) ה fehlt in W., [181]) in M. II ה בב in W. ד בל. [182]) in M II noch א״כ מספר זרד שוים לל.

ממספרי נס מקובצים וג״כ הנה מ וס שוים לכפל מ ולשני שטחי ה בל ולשני שטחי ז בח ולזה יהיה חצי מספרי מס שוה למספר מ[164]) ולשטח ה בל ולשטח ז בח אבל מספר מ שוה לכפלי ד משטחי ב בג ולמספרי גה א״כ חצי מספרי מס שוה לשטח ה בל ולשטח ז בח ולמספרי גה ולכפלי ד מדמיוני שטח ב בג אבל שטח ה בל עם שטח ז בח ועם מספרי גה[165]) ימנהו ב כמספר הנמשך אחר יתרון ג על א רצוני המספר הנמשך אחר ה ז מקובצים ונשימהו מספר ק והנה כפלי ד מדמיוני שטח ב בג ימנהו ב כמספר אחדי שטח ד בג לפי שכפלי ד מדמיוני שטח ב בג הוא מורכב ממספרי ד ב ג אם כן חצי מספרי מס ימנהו ב כמספר שטח ד בג וכמספר ק ולזה התבאר שמספרי מס מקובצים ימנם ב כמספר אחדי כפל שטח ד בג וכמספר כפל ק ונשים כפל שטח ד בג וכפל מספר ק מספר פ הנה מספר פ הוא חלק נקרא בב ממספרי מס מקובצים. **וגם כן** הנה מ ונ שוים לכפל מ ולשני שטחי ה בל א״כ חצי מספרי מנ שוה למ ולשטח ה בל ואולם מספר מ שוה לכפלי ד משטח ב בג ולמספרי גה א״כ חצי מספרי מנ שוה לשטח ה בל ולמספרי גה ולכפלי ד משטח ב בג אבל שטח ה[166]) בל עם מספרי גה ימנהו ג כמספר אחדי הנמשך אחר ה ונשימהו מספר ר וכפלי ד משטח ב[167]) בג ימנהו ג כמספר אחדי שטח ד בב אם כן חצי מספרי מנ ימנהו ג כמספר אחדי שטח ד בב וכמספר ח א״כ מספרי מנ ימנהו ג[168]) כמספר כפל שטח ד בב וככפל מספר ר ונשים כפל שטח ד בג וכפל מספר ר מספר צ הנה מספר צ הוא חלק נקרא בג ממספרי מנ מקובצים.

ונאמר שמספרי מע מקובצים ומספרי נפ[169]) מקובצים ומספרי סצ[170]) מקובצים שוים קצתם לקצת המופת שמע שוים למספר מ ולכפל שטח ט[171]) בל ומספרי נפ שוים למספר מ ולשני שטחי ה בל[172]) ולשני שטחי ד בב ולכפל מספר ק ונשליך מספר מ המשותף ונאמר שכפל שטח ט בל שוה לשני שטחי ה בל מחוברים עם שני שטחי ד בג ועם כפל מספר ק וזה שיתרון ט על ה הוא ח לפי שאה מקובצים שוים לב ויהיו א״כ הה מקובצים שוים לט א״כ יתרון

---

164) In M. II שוה לכפלי ד משטחי ב בב ולמספרי גה ולכפלי ד מדמיוני שטח ב אבל, 165) in M. II am Rand מנב, 166) in W. ג בל, 167) in W. ח בג, 168) in W. 1/2 Reihe doppelt, 169) in W. מנ, ebenso in M. II, 170) in M. II תצ, 171) ט fehlt in M. II, 172) in W. ולשני שטחי ה בג — statt ולשני שטחי ה בל ולשני שטחי ב בג.

מספרי זל[157]) מקובצים פחות אחד מג אם כן מספרי זל מקובצים שוים לה אם כן מספרי כס שוים[158]) למספר ה ולשני שטחי ד בה ולכפל זל מקובצים שהוא כמו כפל ה אבל שני שטחי ד בח עם כפל ח שוים לשני שטחי ל בה אם כן שני מספרי כס מקובצים שוים ג״כ לשני מספרי ה מ הנה כבר מצאנו שלשה מספרים והם מספרי הטכ והראשון והוא כ עם חלק מא מהנשארים שוה למספר ט עם חלק מב מהנשארים והוא ג״כ שוה למספר כ עם חלק מג מהנשארים והוא מה שרצינו[159]).

ויהיה גם כן מספר א מוסיף על שנים ויהיה יתרונו על שנים מספר ד ויהיה יתרון ב על א מספר ה ויתרון ג על ב מספר ז והמספר הנמשך לא לפניו הוא מספר ח והמספר הנמשך לפני ב הוא מספר ט והמספר הנמשך לפני ג הוא ל ונשאר הדרוש על ענינו. הנה נקח מדמיוני שטח האמצעי בגדול כשיעור יתרון הקטן על שנים ונחבר עם העולה המספר הגדול ויתרון האמצעי על הקטן רצוני שנקח מדמיוני שטח ב בג כמנין מה שבמספר ד מן האחדים ונחבר עם העולה מספרי ג ה ונשים העולה מספר מ והוא יהיה המספר הראשון. עוד נחבר מספר מ עם שני שטחי המספר הגדול פחות אחד ביתרון האמצעי על הקטן רצוני שנחבר מ עם שני שטחי ה בל ונשים העולה נ והוא יהיה המספר השני. עוד נחבר נ עם שני שטחי הקטן פחות אחד ביתרון הגדול על האמצעי רצוני שנחבר נ עם שני שטחי ז בה[160]) ונשים העולה ס והוא יהיה המספר השלישי ואומר שמספרי מנס הם המספרים המבוקשים המופת שמספר נ שוה למספר מ ולשני שטחי ה בל ומספר ס שוה למספר מ ולשני שטחי ה בל ולשני שטחי ז בח[161]) א״כ חצי מספרי נס שוה למספר מ ולשני שטחי ה בל ולשטח ז בח אבל מספר מ שוה לכפל מספר ד מדמיוני שטח ב בג ולמספרי גה אם כן חצי מספרי נס שוה לכפל ד מדמיוני שטח ב בג ולשני שטחי ה בל ולשטח ז בח ולמספרי גה אבל כפל ד מדמיוני שטח ב בג עם שני שטחי ה בל ועם שטח ז בח ועם מספרי גה ימנהו א כמספר אחדי שטח ט[162]) בל[163]) ולזה ימנה א מספרי נס כמספר כפל שטח ט בל ונשים כפל שטח ט בל מספר ע הנה מספר ע הוא חלק הנקרא בא

---

157) In M. II זָל, 258) in W. doppelt bis א״כ מספרי, 159) von hier bis zum Schluss des מאמר הראשון fehlt in M. I, 160) in W. ז בה, 161) in M. II ז בא, 162) in W. ב בל, 163) in W. am Rand מג.

דמיוני שטח ל בה ויהיה העולה שוה למספרי טב מקובצים הנה א״כ טב ימנם א שהוא שנים כמספר שני דמיוני שטח ל בה ונשים[146]) שני דמיוני שטח ל בה מספר מ הנה מספר מ הוא חלק נקרא בא ממספרי טכ מקובצים וג״כ ה כ שוים לכפל ה ולשני שטחי ד בה ולכפל ז א״כ חצי מספרי הכ שוה לה[147]) ולשטח ד בה ולז ואולם ה ישוה למספרי ג ד אם כן חצי מספרי ה כ ישוה לשטח ד בה ולמספרי ג ד ז אבל מספרי ג ד ז שוים לשטח א בה לפי שא הוא שנים ומספרי ג ד ז שוים לשני דמיוני מספר ה[148]) אם כן חצי מספר הכ שוה לשטח ד בה ולשטח א בה[149]) וזה שוה לשטח ב בה לפי שב שוה לדא אם כן חצי מספרי הב[150]) שוה לשטח ב בה אם כן חצי מספרי הכ ימנהו ב כמספר אחדי ה ולזה ימנה ב מספרי ה כ כמספר אחדי שני דמיוני ה ונשים שני דמיוני ה כמו נ הנה מספר נ הוא חלק הנקרא בב ממספרי הכ מקובצים וגם כן הנה יהיו הט שוים לכפל ה ולשני שטחי ד בה א״כ חצי מספרי הט שוה לה ולשטח ד בה ואולם ה שוה למספרי נ ד אם כן חצי מספרי ה ט שוה לה ולשטח ד בה ולמספרי נ ד ואולם שטח ד בה עם מספרי נד ימנהו נ[151]) כמספר אחדי הנמשך אחר ד והוא ל אם כן[152] חצי מספר הט ימנהו נ כמספר אחדי ל אם כן מספרי הט ימנם נ כמספר אחדי שני כפלי ל ונשים שני כפלי ל כמו ס הנה מספר ס הוא חלק הנקרא בנ ממספרי הט מקובצים ונאמר שמספרי המ מקובצים שוים למספרי טנ מקובצים ולמספרי[153]) כס מקובצים וזה שהמ[154]) מקובצים שוים לשני דמיוני שטח ל בה ולמספר ה ומספרי טנ מקובצים שוים לפי מה שהתבאר למספר ה ולשני דמיוני שטח ד בה ולשני דמיוני ה הנה יחובר ה עם שטח ד בה ויהיה שוה לשטח ל בה ולזה יהיו שני דמיוני שטח ד בה עם שני דמיוני ה שוים לשני דמיוני ל[155]) בה א״כ מספרי טנ מקובצים שוים למספרי המ מקובצים וג״כ הנה מספרי כס שוים לפי מה שקדם למספר ה ולשני דמיוני שטח ד[156]) בה ולכפל ל הנה מפני שמספר זב מקובצים שוים למספר ג ול פחות אחד מב יהיו

---

146) Die Worte von ונשים bis מספר fehlen in W., 147) in M. II u. W. בה, 148) in W. am Rand מכה תמונה כה, 149) in W. am Rand מכ. 150) in M. II fehlt bis ימנהו, 151) in W. am Rand מנא, 152) in M. II fehlt bis zum nächsten אם כן, 153) in W. fehlt ולמספרי כס מקובצים, in M. I und M. II אל, 154) in M. II fehlt ה, 155) in M. II fehlt ל, 156) in M. II fehlt ד,

שוה לשטח ז בב[138]) אם כן שטח ד בל עם שטח ט בה ועם מספרי גד שוה לשטח ז בב ולמספר ב אבל שטח ז בב כשהוכר עמו ב הוא שוה לשטח ח בב אם כן שטח ד בל עם שטח ט בה ועם מספרי גד ימנהו ג כמספר אחדי ח והוא מה שרצינו לבאר.

נ״ג) נרצה שנמצא שלשה מספרים יהיה הראשון עם הלק מונח מהמספרים הנשארים כמו השני עם הלק מונח שני מהנשארים יותר קטן מהחלק המונח הראשון וכמו השלישי עם חלק מונח שלישי מהנשארים יותר קטן מהחלק המונח השני, ויהיו המספרים אשר אלו החלקים נקראים בהם מספרי[139]) א ב ג ויהיה החלק היותר גדול החלק הנקרא בא והחלק היותר קטן החלק הנקרא בג ולזה יהיה המספר היותר קטן מספר א[140]) והמספר היותר גדול מספר ג ויהיה יתרון ב[141]) על א מספר ד ויתרון ג על ב מספר ז והמספר הנמשך לג לפניו מספר ה[142]) והמספר הנמשך לב לפניו מספר ל הנה בהכרח שיהיה מספר א אם שנים אם מוסיף על שנים ויהיה תחלה שנים הנה נחבר המספר האחרון והוא ג עם[143]) ד שהוא יתרון ב על א ויהיה העולה בידינו מספרי גד מקובצים ונשים העולה ה והוא יהיה המספר הראשון עוד נחבר ה עם שני שטחי המספר הגדול פחות אחד ביתרון האמצעי על הקטן והם שני שטחי ד בה ונשים העולה ט והוא יהיה המספר השני עוד נחבר עם ט כפל שטח הקטן פחות אחד ביתרון הגדול על האמצעי והוא כפל שטח ז בא[144]) פחות אחד ונשים העולה כ והוא יהיה המספר השלישי ונאמר שמספרי ה ט כ הם המספרים המבוקשים המופת שט שוה לה ולשני שטחי ד בה וכ שוה לה ולשני שטחי ד בה ולכפל ז בא פחות אחד שהוא שני דמיוני ז לפי שא פחות אחד הוא אחד אם כן הצי מספרי טכ שוה לה ולשני שטחי ד בה ולמספר ז אבל ה שוה למספרי גד אם כן הצי מספרי טכ שוה לשני שטחי ד בה ולמספרי גדז אבל שני שטחי ד בה עם מספרי גדז שוה[145]) לכפל שטח ל בה אם כן הצי מספרי טכ שוה לכפל שטח ל בה א״כ כבר יוכה שנים בשני

---

[138]) In M. I ז בב. [139]) in M. II חלקי מספרי, [140]) in W. am Rand מל (?), [141]) in M. II יתרון ט, mit Bleistift verbessert ב, [142]) in M. II א mit Bleistift verbessert ג, [143]) in W. על, [144]) in W. דז בא, in M. II דז בא, ד ist mit Bleistift gestrichen, [145]) in M. II u. W. am Rand סמו.

נ"א) כאשר היו שלשה מספרים מתחלפים והוכר השטח ההוה מהגדול פחות אחד ביתרון האמצעי על הקטן עם המספר הגדול ועם יתרון האמצעי על הקטן הנה העולה ימנהו המספר הגדול כמספר אחדי המספר הנמשך למספר יתרון האמצעי על הקטן לאחריו, ויהיו השלשה מספרים[133] המתחלפים מספרי אבג ויהיה א הקטן וב האמצעי וג הגדול ויהיה יתרון ב על מספר א מספר ד ויהיה המספר הנמשך לג לפניו מספר ה והנמשך לד לאחריו מספר ז ואומר ששטח ד בה עם מספרי ג ד ימנהו ג כמספר אחדי ז המופת ששטח ד בה כשחובר עמו ד שוה לשטח ד בג וכאשר חובר עם שטח ד בג מספר ג היה העולה שוה לשטח ז בג אם כן שטח ד בה עם מספרי ג ד שוה לשטח ז בג א"כ שטח ד בה עם מספרי ג ד ימנהו ג כמספר אחדי ז והוא מה שרצינו לבאר.

נ"ב) כאשר היו שלשה מספרים מתחלפים הנה אם חובר השטח ההוה מהגדול פחות אחד ביתרון האמצעי על הקטן עם השטח ההוה מהקטן פחות אחד ביתרון הגדול על האמצעי ועם המספר הגדול ועם יתרון האמצעי על הקטן הנה העולה כשנתחבר זה כלו ימנהו האמצעי כמספר אחדי המספר הנמשך אחר יתרון הגדול על הקטן, ויהיו המספרים המתחלפים מספרי א ב ג והיה מספר א הקטן ומספר ג הוא הגדול והיה יתרון ב על א מספר ד והיה יתרון ג על ב מספר ט והיה המספר הנמשך למספר א לפניו מספר ה והנמשך למספר ג לפניו מספר ל והיה יתרון ג על א מספר ז והמספר הנמשך למספר ז לאחריו מספר ח ואומר ששטח ד בל עם שטח ט בה[134]) ועם מספרי ג ד ימנהו מספר ב כמספר אחדי ח המופת ששטח ד בל כשחובר עמו ד[135]) הוא שוה לשטח ד בג ושטח ט בה[136]) כשחובר עמו ג הוא שוה לשטח ט בא ולב מפני שמספר ג שוה למספר ב ט וכאשר הובר ט עם שטח ט בה היה שוה לשטח ט בא א"כ כאשר הובר בט יחד שהוא ג עם שטח ט בה היה העולה שוה לשטח ט בא ולב א"כ שטח ד בל עם שטח ט בה ועם מספרי ג ד שוה לשטח ד בג ולשטח ט בא ולמספר ב אבל שטח ד בג עם שטח ט[137]) בא

[133]) So in M. II und W.! In M. I שלשה המספרים, [134]) in M. I ט בד, [135]) ד fehlt in W., [136]) in M. I ד בה, [137]) in M. I ט בג,

האמצעי על הקטן עם דמיוני שטחי האמצעי בגדול כמספר מה שבמספר המונח מן האחדים ועם שטח ההוה מיתרון הגדול על האמצעי בקטן פחות אחד ועם המספר הגדול ועם יתרון האמצעי על הקטן הנה כשתתחבר זה כלו יהיה המקובין ימנהו השטח ההוה מהאמצעי פחות אחד[127]) בגדול פחות אחד כמספר מה שבקטן מן האחדים. ויהיו המספרים המתחלפים מספרי ג א ב והיה ג הוא הקטן והיה יתרון ג על שנים מספר ד והיה יתרון א על ג מספר ה והיה מספר ז נמשך למספר א לפניו ומספר ח נמשך למספר ב לפניו והיה יתרון ב על א מספר ט ויהיה מספר כ נמשך למספר ג לפניו ואומר שכפל שטח ה בה[128]) עם כפלי שטחי א בב כמנין מה שבד מן האחדים ועם שטח ט בב ועם מספרי בה ימנהו שטח ז בח כמספר אחדי ג המופת כי בעבור שהיה שטח א בב[129]) עם ט ישוה לשטח ז בח ולמספרי בח יהיו כפלי ד משטחי א בב עם כפלי ד ממספרי ט שוה לכפלי ד משטחי ז בח ולכפלי ד ממספרי ב וכפלי ד ממספרי ה יהיה א״כ כפלי ד משטחי א בב מחובר עם שטח ד בט שוה לכפלי ד משטחי ז בח ולשטח ד בב ולשטח ד בה אבל שטח ט בכ מוסיף על שטח ט בד מספר ט לפי שמספר כ מוסיף[130]) אחד על מספר ד א״כ כפלי ד משטחי א בב עם שטח ט בכ שוה לכפלי ד משטחי ז בח זלשטח ד בכ ולשטח ד בה ולמספר ט וכאשר חברנו שטח ד בכ ושטח ד בה ומספר ט עם כפל שטח ה בה ומספרי בה שנשארו בידינו היה כפל שטח ה בה ושטח ד בכ ושטח ד בה ומספרי בהט אבל כאשר התחבר זה כלו הוא שוה לשני שטחי ז בח[131]) לפי מה שנתבאר במה שקדם א״כ כפל שטח ה בה עם דמיוני שטחי א בב כמה שבמספר ד מן האחדים ועם שטח ט בכ ועם מספרי בה ימנהו שטח ז בח כמספר אחדי ד נחבר עם שנים אבל מספר ד נחבר עם שנים הוא ג א״כ כפל שטח ה בה עם דמיוני שטחי א בב כמו מה שבמספר ד מן האחדים ועם שטח ט בכ ועם מספרי בה ימנהו שטח ז בח כמספר אחדי ג ומש״ל ובבואת[132]) יתבאר שהעולה מזה המקובין ימנהו ג כמספר אחדי שטח ז בה והוא מה שרצינו לבאר.

---

127) In W. noch אבל (?), 128) in W. ה בד, 129) in M. I ד בז, 130) in W. u. M. II על אחד, 131) n M. I ה בה, 132) in M. II u. W. ובכאן.

ההוה מהאמצעי פחות אחד בגדול פחות אחד, ויהיו המספרים המתחלפים מספרי ג̇ א̇ ב̇ ויהיה ג̇ הוא הקטן וב̇ הוא הגדול ויהיה יתרון ג̇ על שנים מספר ד̇ והיה יתרוז א̇ על ג̇ מספר ה̇ והיה מספר ז̇ נמשך למספר א̇ לפניו ומספר ה̇ נמשך למספר ב̇ לפניו והיה יתרון ב̇ על א̇ מספר ט̇ והיה מספר כ̇ שוה למספרי הד̇ מקובצים והוא מבואר שמספר כ̇ הוא פחות שנים מא̇ לפי שמספרי גה̇ שוים לא̇ וד̇ הוא פחות מג̇ שנים ולזה ג״כ יהיה מספר ז̇[119]) נמשך למספר כ̇ לאחריו לפי שמספר ז̇ הוא פחות מא̇ אחד לבד ואומר שכפל שטח ה̇ בה̇ כשנחבר עם שטח ד̇ בב̇ ועם שטח ד̇ בה̇ והתחבר זה כלו עם מספרי בהט̇ הנה העולה שוה לכפל שטח ז̇[120]) בה̇ המופת ששטח ה̇ בה̇ כשהובר עמו ה̇ שוה לשטח ה̇ בב̇ וכאשר הובר שטח ה̇ בב̇ עם שטח ד̇ בב̇[121]) היה העולה שוה לשטח ההוה ממספרי הד̇ מקובצים בב̇[122]) והוא כמו שטח כ̇ בב̇ וכשנתחבר עם העולה ב̇ היה העולה שוה לשטח ז̇ בב̇[123]) ואולם שטח ה̇ בה̇[124]) עם שטח ה̇ בד̇ שוה לשטח ה̇ בדה̇ מקובצים שהוא שטח ה̇ בכ̇ א״כ כפל שטח ה̇ בה̇ עם שטח ד̇ בב̇ ועם שטח ה̇ בד̇ ועם מספרי בהט̇ שוה לשטח ז̇ בב̇ ולשטח כ̇ בה̇ ולמספר ט̇[125]) וא̇ הוא המספר האמצעי וכ̇ הוא יתרונו על הקטן שהוא שנים לפי מה שהונח בתמונה הקודמת אבל שטח ז̇ בב̇ עם שטח כ̇ בה̇ ועם מספר ט̇ שוה לכפל שטח כ̇ בה̇ ולמספרי בכט̇ א״כ כפל שטח ה̇ בה̇ עם שטח ד̇ בב̇ ועם שטח ה̇ בד̇ ועם מספרי בהט̇ שוה לכפל שטח כ̇ בה̇ ולמספרי בכט̇ אבל כפל שטח כ̇ בה̇ עם מספרי בכט̇ שוה לכפל שטח ז̇ בה̇[126]) לפי שמספרי בכט̇ שוים לשני דמיוני ה̇ וז̇ הוא הנמשך לכ̇ לאחריו א״כ כאשר הובר עם שטח כ̇ בה̇ מספר ה̇ יהיה שוה לשטח ז̇ בה̇ אם כן כפל שטח כ̇ בה̇ עם מספרי בכט̇ שהם שני דמיוני ה̇ שוים לכפל שטח ז̇ בה̇ א״כ כפל שטח ה̇ בה̇ עם שטח ד̇ בב̇ ועם שטח ה̇ בד̇ ועם מספרי בהט̇ שוה לכפל שטח ז̇ בה̇ והוא מש״ל.

ג׳) כאשר היו שלשה מספרים מתחלפים והיה יתרון הקטן על שנים מספר מונה הנה כפל הגדול פחות אחד ביתרון

119) In M. I ה̇, 120) in W. ב̇ בה̇, 121) am Rand מכ̇, 122) in M. I בד̇, 123) in M. I ה̇ בב̇, 124) in W. ה̇ בב̇, 125) in M. I ה̇, 126) in M. II בכט ז̇ שוים, in W. noch מי̇ לפי שא̇ שוה לח̇ וט̇ פחות אחד וב̇ פחות מא̇ שנים הנה ח̇ מוסיף על ט̇ וא̇ אחד וחוסר מכ̇ אחד הנה כט̇ מקובצים עם ב̇ שוים לשני דמיוני ח̇.

מספר ג נמשך לא[114]) לפניו ומספר ד נמשך לב לפניו ויהיה יתרון ב על א מספר ה ואומר שמספר ה מחובר עם שטח א בב שוה למספרי דב מחוברים עם שטח ג בד המופת ששטח ג בד כשהובר עמו ד ימנהו א במספר אחדי ד לפי שא מוסיף על ג אחד אם כן שטח ג בד כשחובר עם ד שוה לשטח א בד וג״כ הנה מפני שיתרון ב על א הוא ה יהיה ב שוה לאה נחברים והנה יהיה שטח א בד נחבר עם א שוה לשטח א בב הנה מפני זה יהיה שטח א בד מחובר עם מספרי אה שוה לשטח א בב[115]) ולמספר ה א״כ שטח ג בד מחובר עם מספרי דב שוה לשטח א בב ולמספר ה ומש״ל.

מ״ה) כאשר היו שלשה מספרים מתחלפים והיה הקטן שנים הנה כפל השטח ההוה מהגדול פחות אחד ביתרון האמצעי על הקטן[116]) כשחובר עם הגדול ויתרון האמצעי על הקטן ויתרון הגדול על האמצעי הנה העולה שוה לשטח האמצעי פחות אחד בגדול ולשטח הגדול פחות אחד ביתרון האמצעי על הקטן וליתרון הגדול על האמצעי. ויהיו המספרים המתחלפים מספרי שנים א ב ויהיה ב הגדול והיה א מוסיף על שנים מספר ג וד הוא הנמשך לא לפניו וה הוא הנמשך לב לפניו וז הוא יתרון ב על א ואומר שכפל שטח ה בג מחובר עם מספרי ג ב ז שוה לשטח ד בב ולשטח ג בה ולז המופת שאנחנו נבדיל שטח ג בה ומספר ז המשותפים ונאמר ששטח ד בב שוה לשטח ג בה ולמספרי גב וזה ששטח ג בה מחובר עם ג שוה לשטח ב בג לפי שמספר ב מוסיף על ה אחד ולזה יהיה שטח ב בג מחובר עם ב שוה לשטח ד בב א״כ שטח ה בג מחובר עם מספרי גב שוה לשטח ד בב א״כ כפל שטח ה בג מחובר עם מספרי ג ב ז שוה לשטח ד בב ולשטח ג בה ולז והוא מה שרצינו לבאר.

מ״ט) כאשר היו שלשה מספרים מתחלפים והיה יתרון הקטן על שנים מספר מונח הנה כפל השטח ההוה מהגדול פחות אחד ביתרון האמצעי על הקטן כשחובר עם שטח הגדול במספר המונח ועם שטח הגדול פחות אחד במספר המונח והתחבר זה כלו עם המספר הגדול ויתרון האמצעי על הקטן ויתרון הגדול על האמצעי הנה העולה שוה לכפל השטח

114) In M. II u. W. לו, 115) in M. I א בד, 116) in M. II האחד הקטן. 117) in M. I גד, 118) ז fehlt in M. I.

שוה לב וכבר התבאר שמספר מספרי נס עפ שוה למספרי אחדי צק קה לפי שכל אחד מהם שוה למספר ה א״כ סכום[109]) מספרי נס עפ כמו[110]) אחדי צק קה והנמשך להם הנה כבר התבאר ששטח ד בג עם שטח ה בא ימנם ב במספר חלקי זה טכ למ נס עפ והוא כמספר דה מקובצים שהוא תוספת ג על א ומש״ל.

מ״ו) **כאשר היו שלשה מספרים מתחלפים והיה הקטן שנים הנה כשחובר עם כפל השטח ההוה מהמספר הגדול פחות אחד ביתרון האמצעי על הקטן המספר הגדול ויתרון האמצעי על הקטן ויתרון האמצעי על הגדול הנה זה כלו שוה לכפל השטח ההוה מהאמצעי פחות אחד בגדול פחות אחד**, ויהיו המספרים המתחלפים שלשה והם מספרי שנים א ב ויהיה ב הגדול ויהיה א מוסיף על שנים מספר ג ויהיה א פחות אחד מספר ז ויהיה ב פחות אחד מספר ד ויהיה יתרון ב על א מספר ה ואומר שכפל שטח ג בד מחובר עם מספרי ב ג ה שוה לכפל שטח ז בד המופת ששטח ג בד ימנהו ד כמספר אחדי ג ושטח ז בד ימנהו ד כמספר אחדי ז וז מוסיף על ג אחד מפני שא מוסיף על ג שנים אם כן יתרון שטח ז בד על שטח ג בד הוא שטח אחד בד[111]) שהוא ד א״כ יתרון שטח ז בד על שטח ג בד הוא כמספר ד ולזה יהיה יתרון כפל שטח ז בד על כפל שטח ג בד כמו שני כפלי ד ואומר שמספרי בגד נחברים שוים לשני כפלי ד המופת שמספר ב הוא מוסיף[112]) על מספר ד אחד והנה יתרון מספר ב על מספר א הוא ה א״כ מספרי אה נחברים שוים לב ולזה יהיו מספרי באה נחברים שוים לכפל ב אבל יתרון כפל מספר ב על כפל מספר ד הוא שנים אם כן מספרי בגה מקובצים שוים לכפל מספר ד וכבר היה יתרון כפל שטח ז בד על כפל שטח ג בד כמו כפל מספר ד א״כ כפל שטח ג בד עם מספרי בגה מקובצים שוים לכפל שטח ז בד והוא מש״ל.

מ״ז) **כאשר היו שני מספרים מתחלפים הנה שטח[113]) הקטן בגדול עם יתרון הגדול על הקטן שוה לשטח ההוה מהקטן פחות אחד בגדול פחות אחד כשחובר עמו המספר הגדול והמספר הנמשך לו לפניו**, ויהיו שני המספרים מספרי אב ויהיה

109) Sowohl in M. II als W. כתום, 110) sowohl in M. II als W. תמו, 111) in M. II. u. W. אבל שטח א בד הוא ד, 112) in M. II מופת, 113) הנה שטח fehlt in M. II.

ותוספת אחד והוא מספר אחדי ד אם כן העולה ימנהו א כשיעור אחדי ד ולזה ימנהו ד כשיעור אחדי א ומ״ש.

מ״ה) **כאשר היו שלשה מספרים מתחלפים והובר שטח המספר הגדול ביתרון האמצעי על הקטן עם שטח המספר הקטן ביתרון הגדול על האמצעי הנה העולה ימנהו המספר האמצעי במספר אחדי יתרון הגדול על הקטן,** ויהיו שלשה מספרי אבג מתחלפים והיה ב מוסיף על א כשיעור אחדי ד ויהיה ג מוסיף על ב כשיעור אחדי ה ואומר ששטח ג בד עם שטח א בה ימנהו ב כשיעור אחדי הד מקובצים שהוא יתרון ג על א המופת ששטח ד בג ימנהו ג כשיעור אחדי ד הנה נחלק שטח ד בב בדמיוני ג ויהיו חלקיו השוים לג מספרי זח טכ למ הנה מספר אלו החלקים הוא כמספר אחדי ד[104]) וכזה יתחלקו שטחי ה בא בדמיוני א ויהיו חלקיו השוים לא מספרי נס עפ הנה מספר אלה החלקים הוא כמספר אחדי ה ולזה יהיה מספר חלקי זח טכ למ נס עפ כמספר אחדי דה יחד והוא תוספת ג על א הנה נבדיל מזח זצ[105]) בשיעור ב[106]) וישאר צח[107]) בשיעור ה וכזה יהיו טו לת בשיעור ב וישאר כל אחד מן וכ תמ בשיעור ה ונחלק צח בדמיוני מה שבו מן האחדים ויהיו חלקיו השוים לאחד צק קח ומספרם כמספר אחדי ה וכזה יתחלק וכ בדמיוני האחד ויהיו חלקיו ור רכ ויהיו חלקי תמ השוים לאחד תש שמ וכבר היה מספר מספרי זח טכ[108]) למ כמספר מה שבד מן האחדים אם כן מספר אחדי צק ור תש הוא כמספר מה שבד מן האחדים הנה יתחבר צק ור שת עם נס ויהיה שוה לב לפי שמספר אחדי צק ור שת הוא כמספר מה שבד מן האחדים

ע———————פ   ח—————ק——————צ·········ב—ז

כ—————ר——————ו————ט

נ——————א——————ס   מ——————ש——————ת——————ל

יהיו א״כ אחדי צק ור שת מקובצים שוים לד ונס שוה לא יהיה א״כ נס מקובין עם אחדי צק גר שת שוה לאד מקובצים ואולם אד מקובצים שוים לב יהיה א״כ נס עם אחדי צק ור שת שוה לב וכבר התבאר שעפ מחובר עם אחדי קה רכ שמ

---

104) In W. fehlt von ד bis אחדי ה, 105) in W. זכ, 106) in M. I ג, 107) in M. II בה, 108) in M. I חצ טכ.

מרובע נקבין אבגדה שוה למרובע ה ולכפל שטח ה בנקבין אבגד ולמרובע נקבין אבגד אם כן מעוקב ה עם מרובע נקבין אבגד שוה למרובע נקבין אבגדה והוא מה שרצינו ואולם האחד אין מספר לפניו אבל מעוקבו שוה למרובע הנקבין עדיו כי היה הוא בעינו הנקבין עדיו ומרובע הנקבין עדיו והוא בעינו מעוקבו וזה מבואר מאד.

מ״ב) **המרובע ההוה מנקבין הנמשכים מן האחד עד מספר מונח הנה הוא שוה אל המעוקבים ההוים מהנמשכים מן האחד עד המספר המונח,** ויהיה הנקבין נקבין אבגדה ואומר שהמרובע ההוה מנקבין אבגדה שוה למעוקבים ההוים ממספרי אבגדה המופת שמרובע נקבין אבגדה שוה למעוקב ה[96]) ולמרובע נקבין אבגד[97]) אבל מרובע נקבין אבגד שוה למעוקב ד ולמרובע נקבין אבג והנה מרובע נקבין אבג שוה למעוקב ג ולמרובע נקבין אב והנה מרובע נקבין אב שוה למעוקב ב ולמרובע א והנה מרובע א שוה למעוקב א א״כ מרובע נקבין אבגדה שוה למעוקבים ההוים ממספרי אבגדה והוא מ״ש.

מ״ג) **כאשר היה מספר מה מונח שוה לנקבין נמשכים מן האחד מונחים והיה המספר המונח אמצעי בין הנמשכים**[98]) רצוני שהוא אמצעי בין האחרון מהם ובין האחד **הנה מעוקבי הנמשכים המונחים שוים לנפרדי הנמשכים האחרים והאחד עמהם,** ויהיה מספר ו שוה לנקבין אבג ויהיה ו אמצעי בין מספרי אבגדהוזחטיכ הנמשכים מן האחד ואומר שנפרדי מספרי אבגדהוזחטיכ[99]) שוים למעוקבי אבג המופת שמעוקבי אבג שוים למרובע ו ונפרדי אבגדהוזחטיכ שוים גם כן[100]) למרובע שהוא האמצעי א״כ מעוקבי אבג שוים לנפרדי אבגדהוזחטיכ ומש״ל.

מ״ד) **השטח ההוה ממספר מה במספר מה אם חובר אליו מספר אחר מונח מהמספרים ההם הנה העולה ימנהו המספר הנמשך אל המספר הנשאר לאחריו כמנין אחדי המספר המונח**[101]), ויוכה א בב ויחובר עם העולה א ויהיה[102]) ג ויהיה מספר הנמשך אחר ב ד ואומר שג ימנהו ד במספר אה״י א המופת ששטח א בב ימנהו א בשיעור אחדי ב וכאשר[103]) יחובר עמו א הנה העולה ימנהו א בשיעור אחדי ב

---

96) In M. II ד, 97) in W. am Rand משלפניה, 98) in M. I נמשכים, in M. II מן הנמשכים מן האחד, in W. fehlen die Worte בין הנמשכים רצוני שהוא, 99) in W. noch הנמשכים מן האחד, 100) in W. fehlt גם כן. am Rand מכ״ט ומכ״ג, 101) in M. II noch הנשאר 102) ויהיה ג fehlt in W., 103) in W. fehlt von וכאשר bis ב.

אגה א״כ שטח ו במספרי אבגדהו מקובצים ישוה למרובעי אבגדהו ולמרובעי אגה אבל שטח שלישית ה בנקבין אבגדהו שוה למרובעי אגה וישאר שטח ו פחות שלישית ה בנקבין אבגדהו שוה למרובעי אבגדהו ומש״ל.

ל״ט) כאשר חוסר מספר מונח ממרובעו הנה חצי הנשאר שוה אל נקבין הנמשכים מן האחד עד המספר הנמשך לפני המספר המונח[89], וילקה מספר ו ממרובעו ויהיה המספר הנמשך לו לפניו מספר ה ויהיה חצי הנשאר ממרובע ו מספר ז ואומר שמספר ז שוה אל נקבין הנמשכים מן האחד עד מספר ה המופת שמרובע ו ישוה לנקבין אבגדה מחובר עם נקבין אבגדהו וכאשר הוסר מהמחובר מספר ו היה הנשאר שוה לנקבין אבגדה מחובר עם נקבין אבגדה א״כ חצי הנשאר שוה לנקבין אבגדה ומש״ל.

מ׳) כאשר[90] חובר מספר מה מונח עם חצי הנשאר ממרובעו כשחוסר ממנו המספר המונח הנה העולה שוה אל נקבין הנמשכים מן האחד עד המספר המונח, ויחובר מספר ו עם חצי הנשאר ממרובעו כשחוסר ממנו מספר ו ואומר שהעולה שוה לנקבין אבגדהו המופת שמרובע ו[91]) שוה לנקבין אבגדהו מחובר עם נקבין אבגדה וכאשר לוקח מזה ו והובר עם חצי הנשאר שהוא נקבין אבגדה היה העולה אבגדהו והם המספרים הנמשכים מן האחד עד ו ומש״ל.

מ״א) המרובע ההוה מנקבין הנמשכים מן האחד עד מספר מונח הוא שוה למעוקב המספר המונח ולמרובע נקבין הנמשכים מן האחד עד המספר הנמשך לפני המספר המונח, ויהיה נקבין הנמשכים נקבין אבגדה ואומר שמרובע נקבין אבגדה שוה למעוקב ה ולמרובע נקבין אבגד וזה שמעוקב ה ימנהו ה כמספר מה שבמרובעו מן האחדים[92]) אבל מרובע ה שוה לנקבצי אבגד אבגדה מחוברים א״כ ה הוכה בנקבצי אבגדה אבגד והיה כמו מעוקב ה[93]) אבל שטח ה בנקבצי אבגד אבגדה שוה לשטח ה בה שהוא כמו מרובע ה ולשטח ה בנקבצי אבגד אבגד[94]) שהוא כפל שטח ה בנקבין אבגד אם כן מעוקב ה שוה למרובע ה ולכפל שטח ה בנקבין אבגד[95]) ואולם

---

[89]) In M. I לפניו, [90]) in M. I רצינו לחבר, [91]) ו fehlt in W., am Rand מל in W. u. M. II, [92]) am Rand מל, [93]) am Rand in W. מא, [94]) der 2te אבגד fehlt in M. II, [95]) in M. II am Rand מו.

נקבין מספרי אבגדהו ואומר שהעולה שוה לשלשת דמיוני מרובע מין ה הנמשכים עדיו והם מספרי א נ ה המופת ששטח[78]) ו בנקבין אבגדהו שוה לנקבין א[79]) אב אבג אבגד אבגדה מחוברים עם נקבצי אבגדהו בגדהו גדהו דהו הו ו אבל[80]) נקבצי א אב אבג אבגד אבגדה שוים למרובעי אגה ונקבצי[81]) אבגדהו בגדהו גדהו דהו הו ו כשחוסר מהם אבגדהו יהיה הנשאר[82]) שוה לשני כפלי מרובעי אגה אם כי שטח ו במספרי אבגדהו מקובצים שוה לשלשת דמיוני מרובעי אגה ולנקבין אבגדהו ושטח[83]) ו בנקבין אבגדהו מוסיף על שטח ה בנקבין אבגדהו כמו נקבין אבגדהו יהיה אם כן שטח ה בנקבין אבגדהו שוה לשלשת דמיוני מרובעי אגה והוא מ״ש לבאר ומזאת התמונה יתבאר שאם הוכה שלישית המספר המונה על נקבין הנמשכים מן האחד עד המספר הנמשך לו לאחריו שהעולה שוה למרובעי מין המספר המונה הנמשכים עדיו וזה שכאשר הוכה המספר ההוא המונה בנקבין ההוא היה העולה שוה לשלישית מרובעי מין המספר המונה הנמשכים עדיו יהיה א״כ שטח שלישית המספר ההוא המונה במספר ההוא[84]) שוה לשלישית שלשת כפלי מרובעי מין המספר המונה הנמשכים עדיו שהוא כמו מרובעי המין ההוא הנמשכים עדיו ומ״ש.

ל״ה) **כאשר הוכה מספר מונה פחות שלישית המספר הנמשך לו לפניו על נקבין הנמשכים מן האחד עד המספר המונה הנה העולה שוה למרובעי כל המספרים הנמשכים מן האחד עד המספר המונה,** ויוכה מספר ו פחות שלישית מספר ה על נקבין אבגדהו ואומר שהעולה שוה למרובעי מספרי אבגדהו המופת ששטח ו במספרי[85]) אבגדהו מקובצים שוה לנקבצי אבגדהו בגדהו גדהו דהו הו ו מחוברים עם נקבצי א[86]) אב אבג אבגד אבגדה אבל[87]) נקבצי אבגדהו בגדהו גדהו דהו הו ו שוים למרובעי אבגדהו ונקבצי[88]) א אב אבג אבגד אבגדה שוים למרובעי

---

78) Am Rand מל״ד in W. u. M. II, 79) א fehlt in W., 80) am Rand מל״ב in W. u. M. II, 81) in M. II am Rand מל״ו, 82) fehlt in M. I, 83) in M. II u. W. lautet die Stelle ולפי ששטח ה בנקבין אבגדהו ימנהו נקבין אבגדהו כמספר אחדי ה ושטח ו בנקבין אבגדהו ימנהו נקבין אבגדהו כמספר אחדי ו יו מוסיף על ה אחד אם כן שטח ו בנקבין אבגדהו מוסיף על שטח ה בנקבין אבגדהו כמו נקבין אבג־הו אבל שטח ו בנקבין אבגדהו מוסיף על שלשת דמיוני מרובעי אגה כמו נקבין אבגדהו יהיה אם כן שטח ה בנקבין אבגדהו שוה . . . . In M. II fehlen die Worte von 2ten Male מוסיף bis zum dritten und von יהיה אם כן bis שוה, 84) die letzten 3 Worte fehlen in M. I, 85) am Rand in W. und M. II מל״ד, 86) א fehlt in W., 87) am Rand מל״ג in M. II, 88) am Rand מל״ב in M. II.

דה יהיה הנשאר שוה לשני דמיוני מרובע ד המופת שמרובע ה מוסיף על מרובע ד כפל[77]) ששה אחד בד ומרובע אחד שהוא אחד אם כן מרובע ה מוסיף על מרובע ד שני דמיוני ד ואחד אבל שני דמיוני ד ואחד שוים לד וה מקובצים לפי שה מוסיף על ד אחד א״כ מרובע ה שוה למרובע ד ולמספרי דה א״כ מרובעי דה שוים לשני כפלי מרובע ד ולמספרי דה וכאשר נגרע מהם מספרי דה היה הנשאר שוה לשני דמיוני מרובע ד והוא מ״ש.

ל״ו) כאשר חובר נקבץ הנמשכים מן האחד ונמשכים בראשיתם עד שהגיע הנמשך אל האחרון הנה אם חוסרו מהם המספרים ההם הנמשכים יהיה הנשאר שוה לכפל מרובעי המין שלפני האחרון הנמשכים עדיו אם זוג זוג ואם נפרד נפרד והאחד עמהם, ויחוברו נקבצי אבגדה בגדה גדה דה ה ויחוסרו מהעולה מספרי אבגדה מקובצים ואומר שאם היה המספר שלפני האחרון זוג שהנשאר שוה לכפל מרובעי הזוגות הנמשכים עדיו ואם היה המספר שלפני האחרון נפרד הנה הנשאר שוה לכפל מרובעי הנפרדים הנמשכים עדיו והאחד עמהם ויהיה תחלה זוג כמו הענין במשלנו זה ואומר שהנשאר שוה לכפל מרובעי הזוגות הנמשכים עד ה והם ב ד המופת שהעולה שוה למרובעי אבגדה פחות מספרי אבגדה אבל הנשאר ממרובעי דה כשחוסר מהם מספרי דה שוה לכפל מרובע ד והנשאר מרובעי בג כשחוסר מהם מספרי בג שוה לכפל מרובע ב ומרובע א הנשאר לוקח כלו בהלקה א מפני שא הוא אחד א״כ הנשאר שוה לכפל מרובעי דב ויהיה ג״כ המספר שלפני האחרון נפרד ואומר שהנשאר שוה לכפל מרובעי הנפרדים הנמשכים עד האחרון ויהיו המספרים אבגדהו והמספר הנמשך לו לפניו הוא נפרד והוא ה ואומר שהנשאר שוה לכפל מרובעי הנפרדים הנמשכים עד ו והם אבג המופת שהעולה שוה למרובעי אבגדהו פחות מספרי אבגדהו אבל הנשאר ממרובעי הו כשלוקח מהם מספרי הו שוה לכפל מרובע ה והנשאר ממרובעי גד כשלוקח מהם מספרי גד שוה לכפל מרובע ג והנשאר ממרובע אב כשלוקח מהם מספרי אב שוה לכפל מרובע א א״כ הנשאר כלו שוה לכפל מרובעי אבג ומ״ש.

ל״ז) כאשר הוכה מספר מונח על נקבץ הנמשכים מן האחד עד המספר הנמשך לו לאחריו הנה העולה שוה לשלשת מרובעי מין המספר המונח הנמשכים עדיו, ויוכה מספר ה על

77) In M. I fehlt bis שני דמיוני.

ל״ג) כאשר חוברו נקבצי המספרים הנמשכים מן האחד נמשכים בראשיתם עד שיגיע ההמשך אל האחרון הנה העולה שוה למרובע כל המספרים ההם, ויחובר נקבין אבגדה עם נקבין בגדה ועם נקבין גדה ועם נקבין דה ועם מספר ה ואומר שהעולה שוה למרובעי אבגדה המופת שכל אחד ממספרי אבגדה הוא באלה המספרים כמספר מה ישבו מן האחדים וזה שכל מספר יהיה מספר המספרים הנמשכים עדיו כמספרו אבל המספר ימצא בכל אחד מהנקבצים המתחילין מהמספרים הנמשכים עדיו ואיננו בנקבצים המתחילין מהמספרים אשר אחריו כי הוא בלתי אפשר שימשך המספר הקטן אחר הגדול הנה אם כן כל מספר ממספרי אבגדה הוא באלו הנקבצים כמנין מה ישבו מן האחדים בשוה וזה שוה למרובעו אם כן אלו הנקבצים מחוברים שוים למרובעי מספרי אבגדה והוא מה שרצינו.

ל״ד) כאשר חובר נחבר נקבצי הנמשכים מן האחד נמשכים בראשיתם עד שיגיע ההמשך אל האחרון עם נחבר נקבצי הנמשכים מן האחד נמשכים בתכליתם ומתחילים מן האחד עד שיגיע ההמשך אל המספר הנמשך לפני האחרון אשר זכרנו הנה העולה שוה לשטח המספר האחרון בנקבין הנמשכים מן האחד עדיו, ויחובר [75]) נחבר נקבצי אבגדה בגדה גדה דה ה עם נחבר נקבצי א אב אבג אבגד ואומר שהעולה שוה לשטח ה בנקבין מספרי אבגדה המופת שהנקבין הראשון מהנמשכים בראשיתם הוא אבגדה וא יחובר עם בגדה ויהיה אבגדה ואב יחובר עם גדה ויהיה אבגדה ואבג [76]) יחובר עם דה ויהיה אבגדה ואבגד יחובר עם ה ויהיה אבגדה הנה אם כן כאשר יחוברו הנקבצים הנמשכים בראשיתם עם גילים מהנקבצים הנמשכים באחריתם היה כל אחד מהם שוה לנקבין אבגדה אבל מספר נקבצי הנמשכים בראשיתם הוא כמספר אחדי האחרון שהוא ה מפני שמספר הנמשכים מן האחד עד ה הם כמספר מה שבה מן האחדים אם כן העולה ימנהו נקבין אבגדה כמספר אחדי ה א״כ כבר יוכה נקבין אבגדה במספר ה ויהיה שוה אל העולה מזה החבור והוא מה שרצינו.

ל״ה) כאשר חוסרו שני מספרים נמשכים ממרובעיהם הנה הנשאר שוה לשני כפלי מרובע המספר הקטן, ויהיו שני המספרים דה נמשכים ויהיה ה הוא הגדול ואומר כי כשיחוסרו ממרובעיהם מספרי

---

75) In M. I beginnt erst bei המופת, 76) in W. fehlt bis ואבגד.

ו יהיה חצים כמו ו א״כ נקבצי אבגדה אבגדהו מחוברים שוים לשטח ו בו והוא כמו מרובע ו והוא מה שרצינו.

ל״א) שני דמיוני נקבין הנמשכים בדרך המספר מן האחד עד מספר מונח שוים אל המספר המונח מחובר עם מרובעו.
ויהיו המספרים הנמשכים מספרי אבגדה ויהיה א אחד ואומר ששני דמיוני נקבין אבגדה שוה למספר ה ולמרובע ה המופת שכאשר חובר נקבין אבגדה עם נקבין אבגד היה העולה שוה למרובע ה יהיה אם כן נקבין אבגדה מחובר עם נקבין אבגדה מוסיף על מרובע[73]) ה כמו מספר ה הנוסף והוא מה שרצינו ומזאת התמונה נתבאר שנקבין הנמשכים מן האחד עד מספר מונח שוה לחצי מרובע המספר המונח ולחציו.

ל״ב) כאשר חוברו נקבצי המספרים הנמשכים מן האחד נמשכים בתכליתם ומתחילין מן האחד עד מספר מונח הנה העולה שוה למרובע מין המספר המונח הנמשכים בדרך המספר מן האחד[74]) עד המספר המונח רצוני שאם היה המספר המונח זוג יהיה העולה שוה למרובעי הנפרדים הנמשכים עד המספר המונח ואם היה המספר המונח נפרד יהיה העולה שוה למרובעי הנפרדים הנמשכים עד המספר המונח והאחד עמהם, ויהיה א אחד ויחובר עם נקבין אב ועם נקבין אבג ועם נקבין אבגד ועם נקבין אבגדה ועם נקבין אבגדהו ויהיה ו זוג ואומר שהעולה שוה למרובעי ב ד ו שהם הזוגות המופת שנקבצי אבגדהו אבגדה מחוברים שוים למרובע ו ונקבצי אבגד אבג מחוברים שוים למרובע ד ונקבצי אב א מחוברים שוים למרובע ב אם כן נחבר נקבצי א אב אבג אבגד אבגדה אבגדהו שוים למרובעי ב ד ו ויהיה ג״כ האחרון נפרד ואומר שהעולה שוה למרובעי הנפרדים הנמשכים עד המספר המונח והאחד עמהם המשל שיהיה האחרון אבגדהוז ויהיה ז נפרד ואומר שהעולה ישוה למרובעי א ג ה ז הנפרדים המופת שנקבצי אבגדהוז אבגדהו מחוברים ישוה למרובע ז ונקבצי אבגדה אבגד מחוברים שוה למרובע ה ונקבצי אבג אב מחוברים שוה למרובע ג וישאר א שהוא מבואר שהוא שוה למרובעו מפני[75]) שהוא אחד א״כ העולה שוה למרובעי א ג ה ז והוא מה שרצינו.

---

73) In M. I מספר מרובע in M. II מספר in W. על ה רבע, 74) מן האחד fehlt in M. II, 75) fehlt in M. I bis אחד.

מספר המספרים והוא מבואר שלא ישאר נפרד [66]) באחת הפאות שלא יתחבר עם גילו בפאה האחרת לפי שמספר המספרים אשר אחר המספר האמצעי הוא כמו מספר המספרים אשר לפניו והזוגות יתחברו עם הזוגות והנפרדים עם הנפרדים כמו שקדם אם כן מספר הנפרדים אשר לפני האמצעי כמו מספר הנפרדים אשר לאחריו [67]) אבל מספר הנפרדים אשר לפני ה̇ הוא כמו חצי מספר ה̇ כשנגרע ממנו אחד יהיה אם כן מספר מספרי אגזט כמו מספר ה̇ פחות אחד א״כ נקבין מספרי אגזט ימנהו ה̇ כשיעור אחדי ה̇ פחות אחד וה̇ ימנה עצמו פעם אחת אם כן נקבין מספרי אגהזט ימנהו ה̇ [68]) בשיעור אחדי ה̇ א״כ נקבין מספרי אגהזט שוה למרובע ה̇.

ויהיה ג״כ האמצעי זוג כמו הענין במספרי אבגדהוז ואומר שנקבין מספרי אגהז שוה למרובע מספר ד̇ שהוא האמצעי והנה יתבאר בכמו הביאור הקודם שנקבין מספרי אגהז ימנהו ד̇ כשיעור מספר המספרים ולפי שיהיה מספר ד̇ זוג יהיו הנפרדים לפניו שוים לחצי מספרם וכבר נתבאר שמספר הנפרדים אשר [69]) לאחריו שוה למספר הנפרדים לפניו א״כ מספר הנפרדים לאחריו שוה לחצי מספרם ולזה יהיה מספר הנפרדים אשר לפניו ולאחריו שוה למספר ד̇ וכבר נתבאר שנקבין מספרי אגהז ימנהו ד̇ במספר הנפרדים ההם אשר הוא שוה למספר ד̇ א״כ נקבין מספרי אגהז שוה למרובע ד̇ והוא מש״ל.

ל׳) **כאשר חובר נקבין הנמשכים בדרך המספר. מתחילין מן האחד עד מספר מה מונה עם נקבין הנמשכים מתחילין מן האחד עד המספר הנמשך אחר המספר המונה הנה העולה שוה למרובע מספר הנמשך אחר המספר המונה,** ויחובר נקבין מספרי אבגדה עם נקבין מספרי אבגדהו ויהיה א̇ אחד ואומר שהעולה שוה למרובע ו̇ המופת שאנחנו נשים מספר הנמשך אחר ו̇ מספר ז̇ והוא מבואר שנקבין מספרי אבגדה שוה לשטח חצי מספר ה̇ בו̇ ונקבין [70]) אבגדהו שוה לשטח חצי מספר ו̇ בז̇ אבל שטח חצי מספר ו̇ בז̇ שוה לשטח חצי מספר ז̇ בו̇ מפני שהצלעות מספיקות א״כ נקבצי אבגדה אבגדהו מחוברים שוים לשטח חצי מספר ה̇ בו̇ וחצי מספר ז̇ בו̇ והוא [71]) כמו שטח חצי מספר הז̇ בו̇ ומפני [72]) שה̇ וז̇ הוא כמו כפל

---

66) Fehlt in M. II u. W, 67) am Rand in W. מסוף י״ט ומסוף כ׳, 68) in W u. M. II fehlt von ימנהו bis שוה, 69) in M. II lautet die Stelle אשר לפניו ולאחריו שוים למספר ד̇. אם כן נקבין מספרי אגהז ימנהו ד̇ כשיעור אחדי ד̇ אם כן נקבין מספרי אגהז שוה למרובע ד̇ והוא מש״ל, 70) fehlt in M. I bis מפני, 71) fehlt in M. II und W. bis ומפני, 72) in M. II מפני.

שוים אל שטח ד׳ בז׳ המופת שחסרון ג׳ מד׳ שוה לתוספת ה׳ על ד׳ אם כן גה׳ מקובצים שוים לשני כפלי ד׳ וגם כן חסרון ב׳ מד׳ שוה לתוספת ו׳ על ד׳ א״כ בו׳ נחברים שוים לשני כפלי ד׳ וכזה נתבאר שאז׳ מחוברים שוים לשני כפלי ד׳ א״כ נקבין מספרי אבגדהוז׳ ימנהו ד׳ כמספר המספרים ההם לפי[64]) שכל שנים מהם ימנם ד׳ שני פעמים וד׳ ימנה עצמו פעם אחת אם כן נקבין מספרי אבגדהוז׳ ימנהו כמספר המספרים ההם אבל מספר המספרים ההם הוא ז׳ א״כ נקבין מספרי אבגדהוז׳ ימנהו ד׳ כמספר אחדי ז׳ א״כ כבר יוכה ד׳ בז׳ ויהיה שוה לנקבין מספרי אבגדהוז׳ והוא מה שרצינו ואין ספק שבזה ההדרגה יגיע אל האחרון כהגיענו אל הראשון לפי שמספר ד׳ הוא האמצעי בין האחרון והראשון ולזה יהיה מספר הנמשכים לפני האמצעי כמו מספר המספרים הנמשכים לאחריו.

כ״ח) **כאשר היו מספרים נמשכים מתחילין מן האחד והיה מספר המספרים נפרד הנה אם הוכה חצי המספר האחרון במספר הנמשך לו לאחריו יהיה העולה שוה אל נקבין המספרים ההם,** ויהיו המספרים מספרי אבגדהוז׳ וא׳ הוא[65]) אחד ויהיה המספר הנמשך למספר ז׳ לאחריו מספר ח׳ ואומר ששטח חצי מספר ז׳ במספר ח׳ שוה אל נקבין מספרי אבגדהוז׳ המופת כי מפני שא׳ עם ז׳ נחברים שוים לשני כפלי ד׳ לפי שא׳ הוא אחד יהיה ח׳ שוה לכפל ד׳ וכבר נתבאר שנקבין מספרי אבגדהוז׳ שוה לשטח ד׳ בז׳ ושטח ד׳ בז׳ שוה לשטח כפל ד׳ בחצי מספר ז׳ לפי שהצלעות מספיקות רצוני לומר שיחס ד׳ אל כפל ד׳ כיחס חצי מספר ז׳ אל ז׳ א״כ שטח ד׳ בז׳ שוה לשטח ה׳ בחצי מספר ז׳ ולזה יהיה שטח ח׳ בחצי מספר ז׳ שוה לנקבין מספרי אבגדהוז׳ והוא מה שרצינו.

כ״ט) **נקבין הנפרדים הנמשכים בדרך המספר והאחד עמהם שוה למרובע המספר האמצעי בין הנפרד האחרון והאחד,** ויהיו המספרים אבגדהוהחט׳ ומספרי אגהזט׳ הם נפרדים ואומר שנקבין נפרדי אגהזט׳ שוה למרובע האמצעי בין א׳ ובין ט׳ המופת שהמספר האמצעי אם שיהיה זוג ואם שיהיה נפרד ויהיה תחלה נפרד כמו הענין במשלנו זה ואומר שמספרי אגהזט׳ מקובצים שוים למרובע מספר ה׳ שהוא האמצעי המופת שא׳ יחובר עם ט׳ ויהיה כמו כפל ה׳ וג׳ יחובר עם ז׳ ויהיה כמו כפל ה׳ אם כן נקבין מספרי אגזט׳ ימנהו ה׳ כשיעור

---

[64]) In M I fehlt bis ההם. [65]) fehlt in M. II und W.

שוה לב̇ 59) וג"כ הנה מפני שהז̇ 60) הוא חסרון מספר א̇ ממספר ב̇ כבר יחובר הז̇ עם א̇ ויהיה כמו ב̇ וכבר היה ג̇ז̇ שוה לב̇ אם כן מספר א̇ וג̇ה̇ נחברים שוים לשני 61) כפלי מספר ב̇ והוא מה שרצינו.

כ"ו) כאשר נקבץ המספרים הנמשכים כדרך המספר מתחילין מן האחד והיה מספר המספרים שחוברו זוג הנה העולה שוה אל שטח חצי מספר המספרים במספר הנמשך אחר המספר האחרון, ויהיו המספרים הנמשכים מספרי אבגדהו̇ ויהיה המספר הנמשך אחר ו̇ מספר ז̇ וא̇ הוא אחד ונקראהו מספר בכל זאת החקירה על צד ההעברה ואומר שאבגדהו̇ מקובצים שוה אל הנערך מהצי מספרם על מספר ז̇ המופת כי מפני שא̇ הוא אחד ו̇ וא̇ מקובצים שוים לז̇ אבל תוספת ב̇ על אחד שוים להסרון ה̇ מן ז̇ מפני שהתוספת הוא אחד אם כן $_{9}^{2}$) ב̇ה̇ מחוברים שוה לז̇ וגם יתבאר שיתרון ג̇ על אחד שוה להסרון ד̇ מז̇ לפי שהתוספת הוא שנים א"כ ג̇ד̇ מחוברים שוים לז̇ א"כ נקבץ מספרי אבגדהו̇ ימנהו ז̇ כשיעור חצי מספרם לפי שכל שנים מהם ימנהו פעם אחת והוא מה שרצינו והוא מבואר שבזה הביאור בעינו יתבאר לאין תכלית ואין ספק שהוא מחויב שנגיע בזאת ההדרגה באחרונה אל שני מספרים נמשכים כמו ג̇ד̇ במשלנו זה שאם היה אפשר זולת זה יהיה ביניהם באחרונה מספר אחד אם כן המספר הגדול מהם מוסיף על גילו שנים ונשים חסרון הגדול מהם מהמספר האחרון מספר ט̇ ולזה יהיה יתרון הקטן מאלו שני המספרים הגיליים על האחד מספר ט̇ וכבר 63) היה יתרון הגדול על הקטן שנים יהיה א"כ יתרון הגדול על האחד מספר ט̇ נחבר עם שנים וכבר היה יתרון האחרון על הגדול מספר ט̇ יהיה אם כן יתרון האחרון על האחד כמו שני דמיוני מספר ט̇ מקובצים עם שנים אבל שני דמיוני ט̇ מקובצים עם שנים הוא זוג אם כן יתרון האחרון על האחד מספר זוג אם כן האחרון נפרד וכבר היה זוג זה שקר א"כ הוא מחויב שיגיע באחרונה אל שני מספרים נמשכים וכזה התאמת הספור . . . . .

כ"ז) כאשר חוברו המספרים הנמשכים בדרך המספר והאחד עמהם והיה מספר המספרים שחוברו נפרד הנה העולה שוה אל שטח המספר האמצעי מהם במספר האחרון, ויהיו המספרים הנמשכים אבגדהו̇ז̇ ואומר שמספרי אבגדהו̇ז̇ מחוברים

---

59) In M. I לב̇ המונח, 60) in M. I ג̇ז̇. 61) in M. II לכפל, 62) in M. II am Rand מבק, 63) in M. I fehlt von וכבר bis נחבר.

כ״ג) כאשר היה מספר הנמשכים לפני מספר מונח כמו מספר הנמשכים לאחריו הנה אם היה הראשון מהנמשכים לפניו זוג הנה האחרון מהנמשכים לאחריו זוג ואם נפרד נפרד, ויהיה המספר המונח מספר ד והנמשכים לפניו מספרי גבא והנמשכים לו לאחריו מספרי הוזח ואומר שאם היה מספר א זוג שמספרם ח זוג ואם היה מספר א נפרד הנה מספר ח נפרד המופת שאנחנו נשים יתרון מספר ד על מספר א ט ולזה היה יתרון מספר ה על מספר[53] ד מספר ט הנה א״כ יתרון מספר ח על מספר א הוא כמו שני דמיוני מספר ט אבל[54] שני דמיוני ט הוא זוג הנה א״כ יתרון מספר ח על מספר א הוא זוג ולזה אם יהיה א זוג יהיה ח זוג ואם יהיה א נפרד יהיה ח נפרד והוא מש״ל.

כ״ד) כאשר חובר מספר והיה יתרון מספר[55] מה מהם על אחד כמו חסרון השני ממספר[56] מה מונח הנה שני המספרים מחוברים שוים אל המספר הנמשך אל המספר המונח לאחריו, ויהיה תוספת א על אחד כמו חסרון מספר ב ממספר ג המונח ויהיה המספר הנמשך אל ג לאחריו מספר דה ואומר שמספרי אב מחוברים שוים למספר דה המופת שנגרע אחד מדה

א ——— ב ——— ג ——— דה

ד ——— ח ——— ז ——— ה

והוא הז וישאר דז שוה לג ונשים[57] חסרון ב מג מספר זח וישאר דח ישוה לב אבל הז הוא ג״כ תוספת א על אחד וזה הוא אחד א״כ יהיה הח שוה לא וכבר היה דח ישוה לב א״כ דה ישוה לבא מחוברים והוא מה שרצינו.

כ״ה) כאשר חוברו שני מספרים והיה תוספת אחד מהם על מספר מונח שוה לחסרון האחר מהמספר המונח הנה שניהם מחוברים שוים לכפל המספר המונח, ויהיה חסרון[58] מספר א ממספר ב המונח שוה לתוספת גה על מספר ב המונח ואומר שא וגה מחוברים שוים לכפל מספר ב המופת שנבדיל מגה מה שהוסיף על ב המונח והוא הז

א ——— ב ——— ג ——— ט ——— ז ——— ה וישאר גז

[53]) In M. II am Rand משלפניה, [54]) in M. I fehlt von אבל bis ט, [55]) in M. I ממספר מה מהם מספר in M. II מספר מספר מהם [56]) in M. I ממספר המינה, [57]) in M. II fehlt bis אבל, [58]) in M. I ויהיה המספר המונח.

שאב הוא זוג יהיה אה נפרד לפי שאב מוסיף על אה אחד וכזה התבאר שאד זוג ואג נפרד והוא אחד הנה אם כן מספר הזוגות הנמשכים עדיו כמו מספר הנפרדים וזהו מש"ל ומוצאת התמונה התבאר שכל מספר נפרד מונח יהיה מספר המספרים הנפרדים מתחילים מן האחד הנמשכים עדיו מוסיף[50]) על מספר הזוגות אחד וזה שכאשר נגרע מהם זה המספר הנפרד היה האחרון זוג ויהיה מספר הזוגות שוה למספר הנפרדים יהיה א"כ מספר הנפרדים מוסיף אחד על מספר הזוגות.

כ"א) **כאשר נמשכו אחר מספר מונח מספרים מה הנה מספר האחרון שבמספרים ההם מוסיף על המספר המונח מן האחדים כמו מספר המספרים הנמשכים ההם,** וימשכו אחר מספר אב המונח מספרי אג אד אה ויהיה מספר אלו המספרים ז ואומר שמספר אה מוסיף על מספר אב מספר ז המופת שאנחנו נשים מספר המספרים הנמשכים עד אב מספר ה הנה א"כ מספר אחדי אב הם ה וג"כ מספר המספרים הנמשכים עד אה מוסיף על מספר המספרים הנמשכים עד אב מספר ז הנה אם כן מספר מספר המספרים הנמשכים עד אה הם מספרי הז מקובצים א"כ מספר מה שבאה מן האחדים הוא כמו מספר הז מקובצים ואולם מספר אחדי אב הוא ה א"כ מספר אה מוסיף על אב כמו מספר ז והוא מש"ל[51]).

כ"ב) **כאשר היה מספר הנמשכים לפני מספר מונח כמו מספר הנמשכים לאחריו הנה יתרון המספר המונח על הראשון מהנמשכים לו לפניו הוא כמו יתרון האחרון מהנמשכים לו לאחריו על המספר המונח,** ויהיה המספר המונח מספר אב ויהיו המספרים הנמשכים לפניו מספרי אג אד אה והמספרים הנמשכים לו לאחריו מספרי אז אח אט ואומר שיתרון מספר אב על מספר אה שוה ליתרון מספר אט על מספר אב המופת שמספר מספרי אה אד אג שוה למספר מספרי אז אח אט אבל מספר מספרי אד אג אב שוה למספר מספרי אה אד אג א"כ מספר מספרי אד אג אב שוה למספר מספרי אז אח אט ויתרון אב על אה הוא כמספר מספרי אד אג אב ויתרון אט על אב הוא כמספר מספרי אז אח אט[52]) א"כ יתרון אב על אה שוה ליתרון אט על אב ומש"ל.

א ה ד ג ב ז ח ט

[50]) In W. מוסיפים, [51]) am Rand מי"ט, [52]) in W. ist hier eingeschoben: והתבאר מזאת התמונה כי כאשר נמשכו לפני מספר מונח מספרים מה הנה המספר המונח מוסיף על המספר הראשון מהמספרים ההם מן האחדים כמו מספר המספרים הנמשכים ההם.

ויוכה[43]) צ̇ בב̇ ויהיה ק̇ ויהיו ה̇ חלקים מג̇ במספר ק̇ מספר ר̇ וישאר מספר ש̇ ואומר שמספרי שע̇ שוים המופת כי א̇ הוכה בב̇ והיה ל̇ הנה יחס א̇ אל ל̇ כיחס אחד אל ב̇ ויתבאר ממה שקדם בתמונה הקודמת שיחס ל̇ אל נ̇ הוא כיחס ג̇ אל ט̇ ויחס נ̇ אל ע̇ הוא כיחס ד̇ אל כ̇ א״כ יחס א̇ אל ע̇ מחובר ממספרי אחד גד̇ אל מספרי בטכ̇ וכזה התבאר שיחס א̇ אל ש̇ מחובר ממספרי ד̇ אחד ג̇ אל מספרי כבט̇ אבל היחס המחובר ממספרי אחד גד[44]) אל מספרי בטכ̇ הוא כמו היחס המחובר ממספרי ד̇ אחד ג̇ אל מספרי בכט̇ א״כ יחס א̇ אל ע̇ ואל ש̇ אחד א״כ ע̇ כמו ש̇ והוא מה שרצינו לבאר והנה קראנו האחד מספר ואם איננו מספר על צד ההעברה כי צד המופת לא יתחלף בזה וזה[45]) מבואר מהמופת הנעשה בזה בתמונה י״ג מזה המאמר.

י״ט) **כל מספר מונח הנה מספר המספרים הנמשכים מתחילים מן האחד עד שהגיע ההמשך אל המספר המונח הוא[46]) כמספר מה שבמספר המונח מן האחדים,** ויהיה המספר המונח מספר אב̇ ואומר שמספר המספרים הנמשכים המתחילים מן האחד עד שהגיע ההמשך אל מספר אב̇ הוא כמספר מה שבמספר אב̇ מן האחדים המופת שאנחנו נחלק[47]) אב̇ בדמיוני מה שיש בו מן האחדים והם אג̇ גד̇ דה̇ הב̇ הנה אג̇ הוא אחד וכאשר הובר עמו גד̇ שהוא אחד היה אד̇ המספר הנמשך לאג̇ לאחריו וכזה התבאר שמספר אה̇ הוא הנמשך למספר אד̇ לאחריו ושמספר אב̇ הוא המספר הנמשך למספר אה̇ לאחריו הנה אם כן מספרי אג̇ אד̇ אה̇ אב̇ נמשכים ומתחילים מן האחד ומספרם כמספר מה שבאב̇ מן האחדים והוא מש״ל וכזה התבאר מזאת התמונה בעצמה שמספר אחדי האחרון מהמספרים הנמשכים מתחילים מן האחד הוא כמספר המספרים ההם.

א ג ד ה ב

כ׳) **כל מספר זוג הנה מספר המספרים הנפרדים הנמשכים מן האחד והאחד עמהם עדיו[48]) שוה למספר הזוגות הנמשכים עדיו[49]),** ויהיה מספר אב̇ מספר זוג ואומר שמספר הזוגות הנמשכים עד אב̇ שוה למספר המספרים הנפרדים הנמשכים עד מספר אב̇ והאחד עמהם המופת שנחלק אב̇ במנין מה שבו מן האחדים והם אג̇ גד̇ דה̇ הב̇ הנה מפני

---

43) In M. II ויוכה בב̇ in W. ויוכה צב̇ בב̇, 44) in M. II und W. אחד בד̇, 45) וזה fehlt in W, 46) in M. II הם, in W. הנה, in M. I הוא, 47) in M. II נניח לחלק, 48) in M. II עדיין, 49) fehlt in M. II.

מה שבמספר ב מן האחדים ולזה יהיה במספר ל מדמיוני פ[33]) כמו מה שבמספר ב[34]) מן האחדים[35]) פחות אחד אבל ה הוא פחות אחד[36]) מב אם כן במספר ל מדמיוני פ[33]) כמו מה שבמספר ה מן האחדים אם כן יחס א אל ל כיחס ב אל ה לפי שמספרי בח הוכו במספר פ ויהיו מספרי אל[37]) וג״כ הנה נשים חלק מג במספר ל מספר ין[38]) ולזה יהיה במספר מ מדמיוני ין[38]) כמו מה שבמספר ה מן האחדים ולזה יהיה גם כן במספר נ מדמיוני ין[39]) כמו מה שבמספר ט מן האחדים ויתבאר על האופן הקודם שיחס ל אל נ כיחס ג אל ט וכזה התבאר שיחס נ אל ע הוא כיחס ד אל כ אם כן יחס א אל ע מחובר ממספרי בגד אל מספרי חטכ[40]) וכזה[41]) יתבאר שיחס א אל ג מחובר מיחס מספרי דבג אל מספרי כחט. אבל היחס המחובר ממספרי בגד אל מספרי הטכ שוה אל היחס המחובר ממספרי דבג אל מספרי כחט א״כ יחס א אל ע ואל ין[42]) אחד ולזה יהיה ע כמו ין[42]) ולזה גם כן יחויב שיהיו מספרי פמס מקובצים שוים למספרי צרת מקובצים וזה שיתרון א על ע הוא מספרי פמס ויתרון א על ין[42]) הם מספרי צרת וכבר התבאר שמספר ע שוה למספר ין[42]) א״כ מספרי פמס שוים למספרי צרת והוא מה שרצינו לבאר.

י״ח) **כאשר הוכה מספר במספר מה מונח ולוקח מהעולה מההכאה חלק מה מונח או חלקים מה מונחים וכן מה שהגיע מלקיחת החלק או החלקים ומההכאות הנה אם הומר הסדור יהיה הנשאר באחרונה אחד בעינו.** ויהיה המספר המונה מספר א ויוכה במספר ב וילקח מהעולה ה חלקים מג וילקח מהנשאר ז חלקים מד וישאר מספר מה ואומר שאם הומר הסדור שילקח ממספר א ז חלקים מד ויוכה הנשאר במספר ב וילקח מהנשאר ה חלקים מג הנה ישאר המספר ההוא בעינו שנשאר בסדור האחר וזה שאנחנו נשים על מספר ב אחד ונשים מספרי הט שוים לג ומספרי זכ שוים לד ויוכה א על ב ויהיה העולה ל ויהיו ה חלקים מג במספר ל מספר מ וישאר מספר נ ויהיו ז חלקים מד במספר נ מספר ס וישאר מספר ע וגם כן הנה נקח ז חלקים מד במספר א ויהיה מספר פ וישאר מספר צ

---

[33]) In W. מדמיוני ע, [34]) שבמספר צ, [35]) in M. II ist von ולזה יהיה במספר ל bis מן האחדים doppelt, [36]) in W. fehlt אחד, [37]) in W. לפי שמספרי בח הו כו במספר מנ ויהיו מספרי אל אס, [38]) in W. פ, [39]) in M. II ε, [40]) in W. ממספרי דבג אל כחט, [41]) in W. fehlt bis אבל. [42]) in W. צ.

והוא המרובע היותר קרוב למספר א המוסיף עליו ויהיה יסוד מספר ב מספר ג ויהיו המספרים הראשונים הקטנים ממספר ג מספרי דהז ויהיה א ראשון אל כל אחד מהם ואומר שמספר א הוא ראשון המופת שאם היה אפשר זולת זה ימנהו מספר מה והוא ח וימנהו כמספר אחדי ט והוא מבואר שאין כל אחד ממספרי הט בלתי קטן מג שאם היה אפשר זה לא יהיה שטח ח בט והוא א קטן משטח ג בג והוא ב[26]) וכבר הונח א קטן מב זה שקר הנה א״כ אחד ממספרי חט הוא קטן מג ויהיה הקטן מג מספר ח הנה מספר ח אם שיהיה ראשון ואם מורכב ואם היה ראשון והוא קטן מג יהיה א בלתי ראשון[27]) אצל כל הראשונים הקטנים מג וכבר הונח ראשון אצל כלם זה שקר ואם היה מורכב הנה ימנהו בהכרח מספר ראשון קטן ממספר ח ולזה יהיה קטן מג ויתחייב השקר הקודם בעינו אם כן לא ימנה שום מספר מספר א ולזה יהיה א מספר ראשון וזה הוא מש״ל.

י״ז) **כאשר לוקח ממספר מונח חלק מה מונח או חלקים מונחים ולוקח עוד מהנשאר חלק אחר מונח או חלקים אחרים מונחים וכן בזה הדרך מה שהגיע הנה אם הומר הסדור יהיה הנשאר באחרונה אחד בעינו ומקובץ החלקים אחד בעינו,** ויהיה המספר המונח מספר א והחלקים הם הנקראים במספרי בגד והם חלק מב במספר א וה חלקים מג בנשאר וז חלקים מד בנשאר ואומר שהחלק אחד מב מא עם ה חלקים מג בנשאר וז חלקים מד בנשאר הנה כשהתקבץ זה כלו יהיה שוה לז חלקים מד במספר א וחלק אחד מב בנשאר וה חלקים מג בנשאר. המופת שאנחנו נשים מספר ה פחות אחד[28]) מספר[29]) ב ונשים אחדי[30]) מספר הט שוים לג ומספרי זכ שוים לד ויהיה חלק מב מא מספר פ וישאר מספר ל ויהיו ה חלקים מג[31]) במספר ל מספר מ וישאר מספר נ ויהיו ז חלקים מד במספר ס מספר נ וישאר מספר ע וג״כ הנה ז חלקים מד במספר א מספר צ ויהיה הנשאר מספר ק ויהיה חלק מב במספר ק מספר ר ויהיה הנשאר מספר ש ויהיו חלקים ה מג במספר ש מספר ת ויהיה הנשאר מספר ץ ואומר שמספרי עץ שוים המופת כי מפני שמספר פ אחד מב במספר א יהיה במספר א מדמיוני פ[32]) כמו

---

[26]) In W. אב, [27]) in W. noch: לפי שימנהו ה מספר אחדי ט אם כן את משותפים — ein offenbares Einschibsel, [28]) in W. fehlt אחד, [29]) in W. und M. II מספרי [30]) in M. II אחד ממספרי, [31]) מג fehlt in M. II, [32]) in W. מדמיוני ט.

והמספרים הנמשכים מספרי הזחט והיה היחס המחובר מיחס א אל ה ומיחס ב אל ז ומיחס ג אל ה ומיחס ד אל ט כיחס כ אל ל ואומר שאם הומר סדור הגיליים ולוקה היחס המחובר מיחס א אל ה ומיחס ב אל ה ומיחס ג אל ט ומיחס ד אל ז יהיה ג"כ כיחס כ אל ל המופת שאנחנו נשים המספר המורכב ממספרי אבגד[16]) מ[17]) והמספר המורכב ממספרי הזחט[18]) נ הנה יחס מ אל נ הוא כמו היחס המחובר ממספרי אבגד אל מספרי הזחט והמספר המורכב ממספרי הזחט[18]) הוא[19]) כמו המספר המורכב ממספרי ההטז אם כן יחס מ אל נ הוא כמו היחס המחובר ממספרי אבגד אל מספרי החטז[20]) וכבר היה יחס מ אל נ כמו היחס המחובר ממספרי אבגד אל מספרי הזחט א"כ (מפתיחת אקלידים[21]) היחס המחובר ממספרי אבגד אל מספרי הזחט הוא כמו היחס המחובר ממספרי אבגד אל מספרי החטז[22]) כיחס כ אל ל א"כ היחס המחובר ממספרי אבגד אל מספרי ההטז[23]) הוא כיחס כ אל ל גם כן והוא מה שרצינו לבאר ובזה התבאר שאם הומר סדר הקודמים ונשארו הקודמים קודמים שהיחס המחובר ישאר אחד בעינו והוא מה שרצינו.

ט"ו) **כל מספר יהיה ראשון ממספר מורכב ממספרים מה מונחים הנה הוא ראשון אצל כל אחד מהם,** ויהיה מספר א ראשון אל מספר ה ויהיה מספר ה מורכב ממספרי בגד ואומר שמספר א ראשון אצל כל מספרי בגד המופת שאי אפשר זולת זה שאם היה אפשר הנה יהיו אג משותפים וימנם מספר מה ונניחהו מספר ז אבל ג ימנה ה וזה שהוא ימנהו כמספר מה שבמורכב בד מן האחדים הנה ז ימנה ה וכבר היה מונה מספר א א"כ יהיו אה משותפים אבל כבר הונח א ראשון אל מספר ה זה שקר אם כן מספר א ראשון אצל כל אחד ממספרי בגד וזה מה שרצינו.

ט"ז) **כל מספר שיהיה ראשון אצל כל המספרים[24]) הקטנים משרש המרובע המוסיף עליו היותר קרוב לו[25]) הנה הוא ראשון,** ויהיה מספר א ראשון אצל כל המספרים הקטנים משרש מספר ב

---

[16]) In W. in M. nur אבג, es muss aber heissen אבגד, [17]) in M. מספרי אמ, [18]) in W. nur הזח, [19]) am Rand in W. משלפניה, [20]) in W. הזחט, [21]) in W. sind die beiden Worte am Rand, [22]) sowohl in W. als M. I הזטח, muss aber heissen החטז, [23]) in W. חטה, [24]) in M. II הראשונים, [25]) in W. fehlt von לו bis nun nächsten קרוב.

כשיעור אחדי המספר המורכב ממספרי בגהז א״כ כבר יוכה מורכב ארה במורכב בגהז ויהיה העולה מספר טכ וכזה התבאר. שאם הוכה מורכב איזה שיהיה מאלו המספרים על המורכב מהמספרים הנשארים יהיה העולה טכ גם כן ובזה התבא באיזה מספר מורכב מכמה מספרים שיהיו שאם הוכה המספר המורכב ממספרים מה מהם על המספר המורכב מהמספרים הנשארים יהיה העולה המספר ההוא בעינו ולזה ימנה המספר העולה המספר המורכב מאיזה שיהיו מהמספרים ההם כמספר אחדי המורכב מהמספרים הנשארים ומש״ל.

ט —— ל —— מ —— ס —— כ

י״ג) **המספר המורכב ממספרים מה יחסו אל המספר המורכב ממספרים אחרים מספרם כמספר המספרים הקודמים כמו היחס המחובר מהמספרים הקודמים אל המספרים הנמשכים,** ויהיה מספר א מורכב ממספרי בגדהז ומספר ה מורכב ממספר טכלמנ ואומר שיחס א אל ה מחובר מחמשה יחסים מיחס ב אל ט ומיחס ג אל כ ומיחס ד אל ל ומיחס ה אל מ[13]) ומיחס ז אל נ המופת שאנחנו נכה המורכב ממספר גדהז במספר ט ונשים העולה ס הנה מורכב גדהז הוכה בב והיה א והוכה בט והיה ס הנה אם כן יחס א אל ס כיחס ב אל ט וגם כן הנה נכה מורכב טדהז בכ ונשים העולה מספר ע[14]) הנה מורכב טדהז הוכה בג והיה ס והוכה בכ והיה ע הנה יחס ס אל ע כיחס ג אל כ וגם כן הנה נכה מורכב טכהז בל ונשים העולה מספר פ ויתבאר כמו הביאור הקודם שיחס ע אל פ הוא כיחס ד אל ל וגם כן הנה נכה מורכב טכלז[15]) במספר מ והיה צ ויתבאר ג״כ שיחס פ אל צ הוא כיחס ה אל מ וכזה התבאר שיחס צ אל ה כיחס ז אל נ ובהיות הענין כן הוא מבואר שיחס א אל ה מחובר מחמשה יחסים מיחס א אל ס ומיחס ס אל ע ומיחס ע אל פ ומיחס פ אל צ ומיחס צ אל ה וכבר התבאר שכל יחס מאלו היחסים הוא כמו גילו מיחסי מספרי בגדהז אל מספרי טכלמנ א״כ יחס א אל ה מחובר מחמשה יחסים מיחס ב אל ט ומיחס ג אל כ ומיחס ד אל ל ומיחס ה אל מ ומיחס ז אל נ והוא מש״ל.

י״ד) **היחס המחובר ממספרים מה קודמים אל מספרים מה נמשכים הנה כאשר הומר סדור המספרים הגיליים ונשארו הקודמים קודמים והנמשכים נמשכים ישאר היחס המחובר כמו היחס המחובר הראשון,** ויהיו המספרים הקודמים מספרי אבגד

13) In W. אל ה, 14) in W, noch בכסוף, 15) in W. טכל.

יהיה העולה המספר ההוא בעינו, ויוכה מספר א על המספר המורכב ממספרי גדה והיה זה ואומר שאם הוכה שטח א בד על שטח ג בה יהיה העולה זה גם כן המופת שאנחנו נחלק זה בדמיוני המספר המורכב ממספרי גדה ויהיו חלקיו זט טל לה הנה מספר חלקיו הוא כמספר מה שבא מן האחדים וכל אחד מאלו החלקים ימנהו שטח ג בה כשיעור[9]) מה שבד מן האחדים הנה[10]) זה ימנהו שטח ג בה כשיעור מה שימנה כל חלקיו יחד אבל כל חלקיו יחד ימנם כמספרם מוכה על ד והנה מספרם הוא כמספר אחדי א הנה א״כ זה ימנהו שטח ג בה כשיעור שטח א בד אם כן כבר יוכה שטח א בד על שטח ג בה ויהיה העולה זה וכזה התבאר שכאשר הוכו המספרים המורכבים משנים מאלו המספרים איזה שיהיו על המספר המורכב מהשנים הנשארים יהיה העולה זה גם כן ובזה הביאור בעינו התבאר שאם הוכה מספר מה על המספר המורכב מארבעה מספרים והיה מספר מה הנה אם הוכה המספר המורכב משנים מהם איזה שיהיו על המורכב מהשלשה הנשארים יהיה העולה המספר ההוא בעינו וכזה התבאר לאין תכלית בכמו זה הביאור בעינו ומפני זה ימנה המספר העולה המספר המורכב משני מספרים איזה שיהיו מהמספרים ההם כשיעור מה שבמספר המורכב מן המספרים הנשארים מן האחדים ומ״ש״ל. א ג ד ה ז ט ל ח

י״ב) **כאשר הוכה מספר מה על המורכב ממספרים כמה שיהיו והיה מספר מה הנה אם הוכה המורכב מאיזה שיהיו מהמספרים ההם על המורכב מהמספרים הנשארים יהיה העולה המספר ההוא בעינו,** ויוכה מספר א על המורכב ממספרי בגדהזח ויהיה העולה טכ ואומר שאם הוכה המורכב ממספרי בזהג על המורכב ממספרי אדח יהיה העולה טכ גם כן המופת שמספר טכ ימנהו המספר המורכב ממספרי בג כשיעור אחדי המספר המורכב ממספרי אדהזח הנה נהלק[11]) טכ בדמיוני אדהזח ויהיו חלקיו טל למ מס סכ הנה מספר אלו החלקים כשיעור אחדי שטח ב בג וג״כ הנה כל אחד מאלו החלקים ימנהו[12]) מורכב אדח כשיעור אחדי שטח ה בז לפי שכל אחד מהם שוה למורכב אדהזח והנה טכ כלו ימנהו מורכב אדח כשיעור שטח ה בז מוכה על מספרם שהוא כמספר שטח ב בג והעולה כבר התבאר שהוא המספר המורכב ממספרי בגהז אם כן טכ כלו ימנהו המורכב ממספרי אדח

9) Von hier bis שטח ג בה fehlt in W, 10) am Rand in W u. M. II מ״ט,
11) am Rand מ״א in M. II, 12) am Rand מ״א in W. und M. II,

ב כמספר שטח א בג הנה א"כ כבר יוכה מספר ב בשטח א בג ויהיה דה והוא מה שרצינו לבאר ובזה יתבאר שאיזה מספר שיוכה מאלה השלשה על השטח ההוה מאחד המספרים הנשארים בשני יהיה העולה דה ולזה ג"כ ימנהו איזה שיהיה מאלו המספרים כמספר שטח אחד מהנשארים בשני וזה הוא מה שרצינו לבאר.

א — ב — ג — ד — ה

.) כאשר הוכה מספר אחד על מספר מורכב משלשה מספרים מונחים והיה העולה מספר מה הנה אם הוכה איזה מספר שיהיה מאלו על המספר המורכב מהשלשה הנשארים יהיה המספר ההוא בעינו, ויוכה מספר א על המספר המורכב ממספרי גדה והיה זה הנה אומר שאם הוכה מספר ד על המספר המורכב ממספרי אגה יהיה העולה זה גם כן המופת שאנחנו נחלק זה בדמיוני המספר המורכב ממספרי גדה ויהיו חלקיו זט טל לה הנה מספר אלו החלקים הוא כמספר אחדי א מפני שזה ימנהו המספר המורכב ממספרי גדה כמספר אחדי א וכל אחד מהלקי זט טל לה ימנהו ד [8]) כשיעור שטח ג בה וזה מבואר ממה שקדם הנה זה ימנהו ד כמספר מה שימנה כל חלקיו יחד אבל כל חלקיו יחד ימנם ד כשיעור שטח ג בה מוכה על א אם כן זה כלו ימנהו ד כשיעור המספר המורכב ממספרי אגה א"כ שטח ד במורכב ממספרי אגה הוא זה ג"כ וכזה התבאר שאיזה שיהיה מאלו המספרים שיוכה על המורכב מהמספרים הנשארים יהיה העולה זה ובזאת ההדרגה יתבאר לבלתי תכלית רצוני שאם הוכה מספר מה על מספר מורכב מארבעה מספרים והוא מספר מה הנה אם הוכה איזה מספר שיהיה מהם על המספר המורכב מהמספרים הנשארים יהיה העולה המספר ההוא בעינו ומפני זה ימנה המספר העולה מהכאת המספר האחד במספר המורכב מהנשארים איזה שיהיה מהמספרים ההם כשיעור המספר המורכב מהמספרים הנשארים.

ז — ט — ל — ח

י"א) כאשר הוכה מספר מה על מספר מורכב משלשה מספרים והיה העולה מספר מה הנה אם הוכה המורכב משני מספרים מהם על המספר המורכב מהמספרים הנשארים

[8]) ד fehlt in W., in M. II sind die Worte von כשיעור bis zum nächsten ימנם ד durch Schreibfehler hinter die Worte א ב ל כל חלקיו יחד gesetzt. Der Text lautet dort וכל אחד מחלקי זט טל לה ימנהו ד במספר מה שימנה כל חלקיו יחד אבל כל חלקיו יחד ימנם ד כשיעור שטה ג בה וזה מבואר ממה שקדם הנה זה כלו ימנהו ד במספר מה שימנת כל חלקיו יחד מוכה על מספרם שהוא כמספר א man sieht, der Text ist vollständig corrumpiert.

באחד מהם ולשטח זה בזה ולמרובע חלק הנשאר, ויהיה המספר מספר אב ונוסף עליו מספר בג ואומר שמרובע אג שוה לשטח אג באב ולשטח אב בבג ולמרובע בג המופת ששטח אג באג שוה לשטח אב באג ולשטח בג באג אבל שטח בג באג שוה לשטח אב בבג ולמרובע בג אם כן מרובע אג שוה לשטח אב באג ולשטח אב בבג ולמרובע בג והוא מה שרצינו.

ח) **השטח ההוה מחצי המספר המונח בעצמו שוה לשטח ההוה מחלק מה מהמספר ההוא בחלק השני ולמרובע יתרון אחד מן החלקים על חצי המספר המונח,** ויהיה המספר המונח מספר אב והולק להצאים בנקודה ג והולק איך שקרה בנקודה ד ואומר שמרובע מספר אג שוה לשטח ההוה מהמספר אד במספר דב ולמרובע ההוה ממספר גד המופת שמרובע אג שוה לשטח אג בגד ולשטח אג בדב מקובצים אבל שטח אד בדב שוה לשטח אג בדב ולשטח גד בדב ונחסר שטח אג בדב המשותף והיה הנשאר למרובע אג שוה לשטח אג בגד שהוא שוה לשטח גב בגד והנשאר לשטח אד בדב הוא שטח גד בדב והנה יתרון שטח גב בגד על שטח גד בדב הוא כמו מרובע גד אם כן מרובע אג שוה לשטח אד בדב ולמרובע גד והוא מה שרצינו.[7]

ב ——— ד - - - - ג ——— א

ט) **כאשר הוכה מספר אחד על מספר מורכב משני מספרים מונחים והיה העולה מה הנה אם הוכה המספר המורכב משני מספרים איזה שיהיו מאלה השלשה על השלישי יהיה המספר ההוא בעינו,** ויוכה מספר א על שטח ב בג ויהיה העולה מספר הד ואומר שאם הוכה מספר ב על שטח א בג יהיה העולה גם כן מספר דה המופת שמספר דה ימנהו שטח ב בג כשיעור אחדי א הנה נחלק דה על דמיוני שטח ב בג ויהיו חלקיו השוים לשטח ב בג חלקי דז זח חד ויהיה מספר אלו החלקים הוא כמספר מה שבא מן האחדים והוא מבואר שכל אחד מחלקי דז זח ימנהו ב בשיעור אחד לפי שכל אחד מהם שוה לשטח ב בג הנה דה כלו ימנהו מספר ב כמספר מה שימנה כל חלקיו יחד אבל כל חלקיו יחד ימנם כמספרם מוכה על ג ומספרם הוא כמספר אחדי א הנה א״כ דה כלו ימנהו

---

[7]) Im M. I fehlt 2 Seiten, die Sätze bis Nr. 23 der Zählung von M. II und W.

הד שוים לשטח הב בגד ואולם שטחי אה בגד והב בגד שוים לשטח אב בגד אם כן שטחי חלקי מספר אב בכל אחד מחלקי מספר גד שוים לשטח אב בגד והוא מה שרצינו.

ד) כאשר חולק מספר מה בשני חלקים הנה שטח כל המספר באחד מחלקיו שוה לשטח האחד באחר ולמרובע החלק אשר זכרנו, ויתחלק מספר אב בשני חלקים ויהיו חלקיו אג גב ואומר ששטח אב בגב שוה לשטח אג בגב ולמרובע בג המופת ששטח אג בגב עם שטח גב בגב שהוא מרובע גב שוה לשטח אב בגב אם כן שטח אב בגב שוה לשטח אג בגב ולמרובע גב והוא מה שרצינו.

ה) כאשר חולק מספר מה לחצאים והוסף עליו מספר מה הנה שטח התוספת במספר כלו (עם התוספת) עם מרובע חצי המספר שוה למרובע חצי המספר והתוספת מקובצים, ויחולק מספר אב לחצאים ויהיו חלקיו אג גב והוסף עליו מספר בד ואומר ששטח אד בדב עם מרובע גב שוה למרובע גד המופת ששטח אד בדב שוה לשטח גד בדב ולשטח אג בדב שהוא שוה לשטח בג בדב וכאשר חובר עמו מרובע גב היה המקובץ שוה לשטח גד בבד ולשטח בג בבד ולמרובע גב וגם כן הנה שטח גד בגד שוה לשטח גד בבד ולשטח גד בגב אבל שטח גד בגב שוה לשטח גב בבד ולמרובע בג אם כן מרובע גד שוה לשטח גד בדב ולשטח גב בבד ולמרובע בג וזה שוה לפי מה שבארנו לשטח אד בדב ולמרובע גב ו' מ' ש'.

ו) כאשר נוסיף על מספר מונח מספר מה הנה מרובע שני המספרים מחוברים שוה למרובע המספרים ההם ולכפל שטח זה בזה, ויהיה המספר אב ונוסיף עליו מספר בג הנה אומר שמרובע אג שוה למרובעי אב ובג ולכפל שטח אב בבג המופת ששטח אג באג שוה לשטח אב באג ולשטח בג באג ואולם שטח אב באג שוה לשטח אב בבג ולמרובע אב ואולם שטח בג באג שוה לשטח אב בבג ולמרובע בג יהיה א"כ מרובע אג שוה לשני מרובעי אב ובג ולכפל אב בבג והוא מה שרצינו.

ז) כאשר נוסיף על מספר מה הנה מרובע שני המספרים מחוברים שוה לשטח המספרים מחוברים

החלק או נקבין החלקים יהיה יותר גדול מחלק או מנקבין החלקים אם יהיה החלק ההוא או נקבין החלקים ההם ממספר מה יותר גדול מהחלק האחד או נקבין החלקים האחרים מהמספר הוא בעינו.

יקרה לאחד החלוקה מצד הנושא והוא צד אחר מהעיון באחד המספר המופשט מנושא אבל זה הספר מקיף בשני הענינים יחד ולזה לא נחוש אם יחלק האחד בקצת תמונות המאמר הראשון.

המאמר הראשון

והוא מקיף על השרשים אשר נתן בזאת המלאכה.

א) [5]השטח ההוה מהכאת שני מספרים האחד באחד ימנהו כל מספר מהם במנין אחדי המספר השני.

ב) כאשר היו שני מספרים מונחים וחולק המספר האחד לחלקים כמה שיהיו הנה שטח המספר האחד בשני שוה לשטח כל אחד מחלקי המספר האחד בשני מקובצים ויהיו המספרים המונחים מספר אב ג וחולק המספר אב לחלקים אה הד דב ואומר ששטח אב בג שוה לשטח אה בג ולשטח הד בג ולשטח דב בג מקובצים המופת ששטח אה בג ימנהו ג במנין מה שבאה מן האחדים ושטח הד בג ימנהו ג במנין מה שבהד מן האחדים ושטח דב בג ימנהו ג במנין מה שבדב מן האחדים הנה אם כן אלו השטחים מקובצים ימנם ג במנין מה שבאה הד דב מן האחדים אבל מנין מה שבאה הד דב מן האחדים הוא מנין מה שבאב מן האחדים הנה אם כן אלו השטחים כלם ימנם ג במנין מה שבאב מן האחדים אבל[6]) שטח אב בג ימנהו ג במנין מה שבאב מן האחדים א״כ שטח אב בג שוה לאלו השטחים מקובצים.

ג   ה   ד   א
ב

ג) כאשר היו שני מספרים מונחים וחולק כל אחד מהם לחלקים כמה שיהיו הנה שטח המספר האחד באחר שוה לשטח חלקי האחד בכל אחד מחלקי המספר האחר, ויהיו המספרים המונחים מספרי אב גד וחולק מספר אב לחלקים אה הב וחולק מספר גד לחלקים גז זח חד ואומר ששטחי אה בכל אחד ממספרי גז זח חד עם שטחי הב בכל אחד ממספרי גז זח חד שוים לשטח אב בגד המופת ששטחי אה בחלקי גז זח חד שוים לשטח אה בגד וכזה התבאר ששטחי הב בחלקי גז זח

---

[5]) In M. I u. II nicht, in W. vor der Ueberschrift המאמר הראשון, in M. II beginnt die Zählung der Sätze und Nr. 2!, [6]) nur in W. bis א״כ.

המספרים הנמשכים מתחילין מן האחד הם אחד ושנים ושלשה וכן מה שהגיע ההמש׳.

המספר הנמשך למספר מה לפניו הוא מה שיחסר מהמספר ההוא אחד המספר הנמשך למספר מה לאחריו הוא מה שיוסיף על המספר ההוא אחד.

נקבץ הנמשכים בדרך המספר מתחילים מן האחד הוא כשיחובר אחד עם שנים ועם שלשה וכן מה שהגיע.

נקבין הנפרדים והנמשכים בדרך המספר מתחילים מן האחד הוא כשיחובר אחד עם שלשה ועם חמשה וכן מה שהגיע.

נקבין הזוגות הנמשכים בדרך המספר הוא כשיחובר שנים שהוא הזוג הראשון עם ארבעה ועם ששה וכן מה שהגיע.

המספרים הנמשכים בזולת דרך המספר הוא שיהיה השני מוסיף על הראשון כשיעור מה שיוסיף השלישי על השני וכן מה שהגיע ההמשך.

חבור נקבצי הנמשכים בדרך המספר נמשכים בראשיתם ומתחילים מן האחד הם נקבצי הנמשכים אשר תכליתם אחת[3]) והראשון מן הנקבצים מתחיל מן האחד והשני משנים וכן לא יסורו נמשכים בראשיתם עד התכלית.

חבור נקבצי הנמשכים בדרך המספר נמשכים בתכליתם ומתחילים מן האחד הם נקבצי הנמשכים אשר כל אחד מהם מתחיל מן האחד והאחד מהם הוא אחד לבד והשני נקבין אחד ושנים והשלישי נקבין אחד ושנים ושלשה וכן לא יסורו נמשכים באחריתם עד התכלית וכן מה שהגיע.

המספר יהיה אמצעי בין מספר מונה ובין האחד אם היה המספר המונה מוסיף עליו כשיעור מה שהוא מוסיף על האחד, והמספר המונה יקרא הקצווי לזה המספר האמצעי.

מיני המספר הם הזוג והנפרד. החלק היותר גדול המספר אשר נקרא בו הוא יותר קטן .והמשל שחצי זוג הוא יותר גדול מהומיש. והמספר אשר נקרא בו הצי הוא שנים והוא קטן מחמשה אשר נקרא בו הומיש וכבר אפשר שנבאר זה במופת בשנניח מספר מה והוא א׳ ויהיו החלקים ממנו מספר ב׳ ומספר ג׳ ויהיה מספר ב׳ יותר גדול ממספר ג׳ ויהיה מספר ד׳ המספר הקורא לחלק הנקרא בב׳ ממספר א׳ ויהיה מספר ה׳ המספר הקורא לחלק הנקרא בג׳ ממספר א׳ ואומר[4]) שמספר ד׳ יותר קטן ממספר ה׳ המופת כי מפני שמספר ד׳ המספר הקורא לחלק הנקרא בב׳ ממספר א׳ הנה ד׳ יוכה בב׳ ויהיה א׳ וכזה יתבאר שמספר ג׳ יוכה בה׳ ויהיה א׳ אם כן ב׳ בד׳ כמו ג׳ בה׳ הנה אם כן צלעותיהם מספיקות יחס ב׳ אל ג׳ כיחס ה׳ אל ד׳ אבל מספר ב׳ יותר גדול ממספר ג׳ אם כן מספר ה׳ יותר גדול ממספר ד׳ והוא מה שרצינו לבאר.

---

[3]) In M. I u. II fehlt von hier bis zum nächsten מתחיל מן האחד, [4]) fehlt in M. I u. II.

ספר מעשה חושב[1]

להחכם הפילוסוף האלקי ר׳

לוי בר גרשום.

נאם לוי בן גרשום בעבור שהתכלית השלמה בעשית המלאכות הוא שנדע במלאכה מלאכה עם ידיעת אופן המעשה למה נעשה אותה בזה האופן והיה החלק המעשיי ממלאכת המספר אחת מהמלאכות המעשיות הוא מבואר שראוי שנחקור בה בסבותיה ועוד סבה אחרת תחייב לחקור בזאת המלאכה בנתינת הסיבות וזה שהוא מבואר שזאת המלאכה מקפת במינים רבים מאד וכל מין ומין ממנה מקיף בחמרים רבים מתחלפים התחלפות רב יביא לחשב שאינם תחת מין אחד ובהיות הענין כן הוא מבואר שלא תשלם הידיעה בזאת המלאכה בזולת ידיעת הסבות כי אם בקושי גדול ואולם עם ידיעת הסבות אשר שתשלם בקלות והיה זה כן לפי שמי שידע הסבות ידע בידיעה אחת תמונת המעשה במינים רבים אשר תקיף במלאכותיהם סבה אחת בעינה. ומי שיסכל הסבות יצטרך בידיעה אחת בעינה לידיעות רבות לפי השתנות החמרים וכאשר היה זה כן ראינו בזה הספור להודיע דרכי המספרים וסבותיהם לפי קצורנו וחלקנו זה הספר לפי זאת החקירה לשני מאמרים.

המאמר הראשון יקיף על השרשים אשר נתן למה שנרצה לבאר מזאת המלאכה. המאמר השני יקיף על דרכי המלאכה במין מין ממיני המספר ונתינת הסבות ולפי שהיה זה הספר מקיף על המעשה והעיון קראנוהו **מעשה חושב** ואולם מדרגות הלמוד הנעשה בזה הספר הנה ראוי שיקדם העיון למעין[2] בו במאמר השביעי והשמיני והתשיעי מאקלידיס כי לא היה רצוננו להשיב בזה הספר דבריו אבל ניחם במדרגת השרשים אחר שהתבארו שם במופת.

פתיחת המאמר הראשון. המספר המורכב ממספרים רבים הוא כשהוכה הראשון בשני והעולה על השלישי וכן עד כלותם.

מספר המספרים והחלקים המונחים הוא מספר מה שבהם ממספרים או חלקים מונחים.

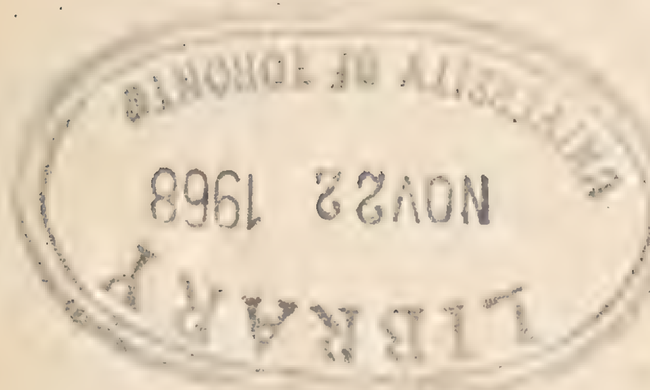
היחס המחובר ממספרים מה מונחים אל מספרים מה מונחים הוא היחס המחובר מיחס הראשון מהקודמים אל הראשון מהנמשכים [ומיחס השני מהקודמים אל השני מהנמשכים] וכן עד כלותם.

---

1) Nur in M. I als Ueberschrift, 2) M. I und II למעשה.

QA
23
L4
1909


LIBRARY
NOV 22 1968
UNIVERSITY OF TORONTO


LIBRARY
NOV 22 1968
UNIVERSITY OF TORONTO

ספר מעשה חושב

להחכם ר׳ לוי בן גרשום ז״ל.

יוצא לאור פעם ראשונה

ע״פ כתבי יד

מתורגם ומפורש בלשון אשכנז

מאת

גרשון לאנגע.



פראנקפורט על נהר מיין.

בדפוס יהודה ליב גאלדע.

לכבוד לוי ב׳ גרשון לפ״ק.

ספר מעשה חושב

להחכם ר׳ לוי בן גרשום ז״ל.

יוצא לאור פעם ראשונה

ע״פ כתבי יד

מתורגם ומפורש בלשון אשכנז

מאת

ג ר ש ו ן ל א נ ג ע.



פראנקפורט על נהר מיין.

ב ד פ ו ס י ה ו ד ה ל י ב ג א ל ד ע.

לכבוד לוי ב׳ גרשון לפ״ק.

M 988

UNIVERSITY OF TORONTO
LIBRARY
PLEASE LEAVE THIS CARD
IN BOOK POCKET

LOCATION

